

6.º TESTE DE MATEMÁTICA A

www.esffranco.edu.pt

12.º ano (alternativo)

01/06/10

Duração: 90 minutos

Nome: _____ N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. “Os nomes de código eram fornecidos por um computador por meio de um processo conhecido como selecção aleatória, cuja finalidade era não revelar absolutamente nada.”

O AFEGÃO, Frederick Forsyth

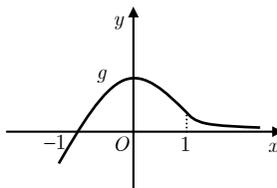
Considere que uma palavra-passe num sítio da internet pode ser formada por seis dígitos (com algarismos e/ou letras das 23 existentes). Ao escolher uma aleatoriamente, qual é a probabilidade de ela ter, pelo menos, uma letra?

- (A) $1 - \frac{{}^{10}A_6}{{}^{33}A_6}$ (B) $1 - \left(\frac{10}{33}\right)^6$ (C) $\left(\frac{10}{33} \times \frac{23}{33}\right)^6$ (D) $\left(1 - \frac{10}{33}\right)^6$

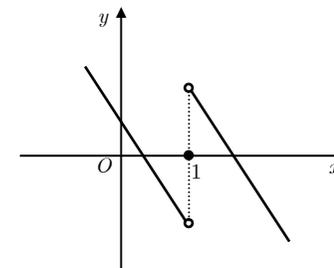
2. Na figura ao lado, -1 é o único zero da função g e o ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão do gráfico de g .

Qual é a afirmação **necessariamente falsa**?

- (A) $g''(-1) = -3$ (B) $g''(0) = -1$
 (C) $g''(1) = 0$ (D) $g''(3) = -1$



3. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio \mathbb{R} . Tal como a figura sugere, o ponto de abcissa 1 é um ponto de descontinuidade do gráfico de f .



Considere a sucessão definida por $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

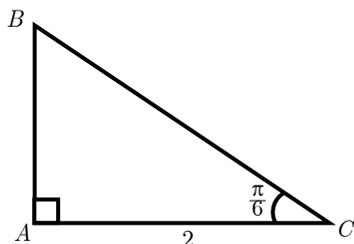
Qual pode ser o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$?

- (A) $+\infty$ (B) 1 (C) 0 (D) -1

4. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição, definida em \mathbb{C} , por $iz = \bar{z}$?

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

5. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$, rectângulo em A .
Sabe-se que $\overline{AC} = 2$ e que a amplitude do ângulo ACB é igual a $\frac{\pi}{6}$.



- Qual é o valor de \overline{AB} ?
(A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. O Ildefonso fez a seguinte experiência: tirou um cubo de gelo do congelador, deixou-o à temperatura ambiente durante alguns minutos, voltou a meter o cubo no congelador e tirou-o novamente passado algum tempo.
Considere que, nos primeiros 9 minutos da experiência, a temperatura do cubo de gelo (em graus Celsius) foi dada, após t minutos, pela função definida por

$$f(t) = \frac{2}{3}t + 2 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) - 10 \quad (\text{a variável } t \text{ vem em radianos})$$

- 1.1. **Usando exclusivamente métodos analíticos** (e a calculadora para eventuais cálculos numéricos), determine quanto tempo passou desde que o cubo de gelo foi reintroduzido no congelador até ser novamente retirado. Apresente o resultado em minutos e segundos (com estes arredondados às unidades). Em caso de cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.
- 1.2. Durante a experiência, quantas vezes a temperatura do cubo de gelo foi igual a -8 graus Celsius? **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, indique, em minutos e arredondado às centésimas, quanto tempo passou para cada caso. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) para a resolução do problema.

2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{e^x - 1}{x^{10}}$
Sem usar a calculadora, determine, se existirem, as equações das assíntotas do gráfico de g .

3. Considere, no conjunto dos números complexos \mathbb{C} , o número $z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$
- 3.1. Sejam A a imagem geométrica de z e B a imagem geométrica de z^4 .
Sendo O a origem do referencial no plano complexo, **represente** o triângulo $[ABO]$ nesse plano e **determine** a sua área.
- 3.2. Determine, na forma trigonométrica, todas as raízes de índice n de z sabendo que as suas imagens geométricas formam os vértices de um triângulo equilátero.

4. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, sejam

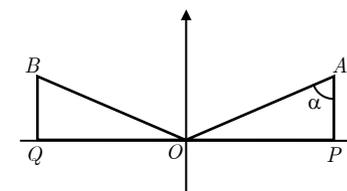
$$w_1 = 2 + i, \quad w_2 = a + 3b + i^{87} \quad \text{e} \quad w_3 = 3 + \sqrt{3}i$$

a e b são números reais. Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

- 4.1. Calcule $\frac{(w_3 - 4)^4}{4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.
- 4.2. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em \mathbb{C} , por:

$$|z - w_1| \leq |w_3| \wedge \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

5. Na figura estão representados, no plano complexo, dois triângulos rectângulos geometricamente iguais, $[OPA]$ rectângulo em P e $[OQB]$ rectângulo em Q .



Sabe-se que:

- Os pontos P e Q pertencem ao eixo real;
- α é a amplitude do ângulo AOP ;
- $\frac{\overline{AP + OP}}{\overline{OP}} = \sqrt{2}$

Suponha que z é a imagem geométrica de B .

Admitindo que $\overline{OP} = 1$ e $\alpha = 67,5^\circ$, escreva z na forma algébrica e indique um seu argumento.

**FIM
COTAÇÕES**

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....39	2.....21	3.....36	4.....36	5.....18
	1.1.....21		3.1.....18	4.1.....18	
	1.2.....18		3.2.....18	4.2.....18	