Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2006/2007)

6.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

3.º Período | 05/06/07 | Duração: 90 minutos

Nome: ______________________ N.º: _____ Classificação: ___ , ___

O professor:

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

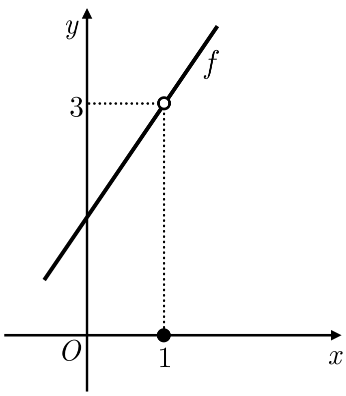
1. *"A fenda parecia mais acidentada do que esperavam. As suas paredes elevavam-se quase na perpendicular e tinha cerca de dez metros de largura."*

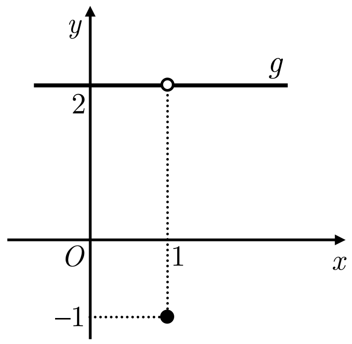
SOLIDÃO NO GELO, David Howarth

Admita que a variável altura, em metros, das fendas encontradas por montanhistas numa certa região, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 10. Sabe-se 20% de todas as fendas têm uma altura superior a 15 metros.
Escolhida uma dessas fendas ao acaso, qual pode ser a probabilidade de a sua altura ser inferior a 6 metros?

(A) $0{,}15$ **(B)** $0{,}17$ **(C)** $0{,}19$ **(D)** $0{,}21$

2. Nas figuras a seguir estão representados os gráficos da funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$ e descontínuas no ponto de abcissa 1.





É contínua para $x = 1$ a função:

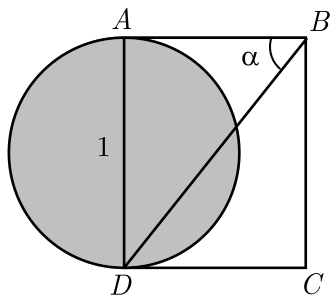
(A) $f + g$ **(B)** $f - g$ **(C)** $f \times g$ **(D)** $\frac{f}{g}$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln\left(25e^{2x}\right)}{2}$

Qual das seguintes expressões pode também definir f ?

(A) $\frac{x+\ln 5}{2}$ **(B)** $\frac{x+5}{2}$ **(C)** $x+\ln 5$ **(D)** $x+5$

4. Na figura estão representados um rectângulo $[ABCD]$ e um círculo de diâmetro $[AD]$.
Tal como a figura sugere:



- α é a amplitude do ângulo ABD;
- o diâmetro do círculo mede uma unidade.

Pretende-se determinar o valor de α para que a área do rectângulo seja igual à área do círculo.

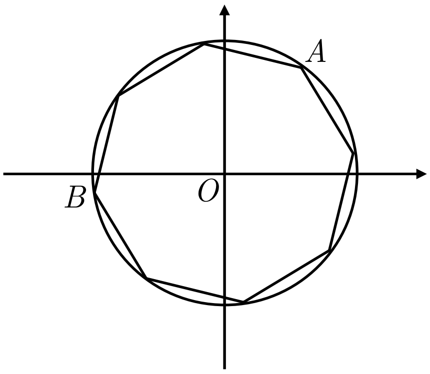
Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\,\pi$ **(B)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\pi}$ **(C)** $\cos\alpha = \sqrt{2}\,\pi$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{4}{\pi}$

5. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, uma recta paralela à bissectriz dos ímpares?

(A) $Re(2z) = Im(z)$ **(B)** $arg(z) = \frac{\pi}{4}$ **(C)** $|z-1| = |z|$ **(D)** $|z+1-i| = |z|$

6. Na figura está representado, no plano complexo, um octógono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Sabe-se que:



- Os pontos A e B pertencem a esse octógono;
- O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $cis\,\frac{3\pi}{10}$;

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice B ?

(A) $cis\,\frac{21\pi}{20}$ **(B)** $cis\,\frac{20\pi}{19}$

(C) $cis\,\frac{11\pi}{10}$ **(D)** $cis\,\frac{10\pi}{9}$

Grupo II

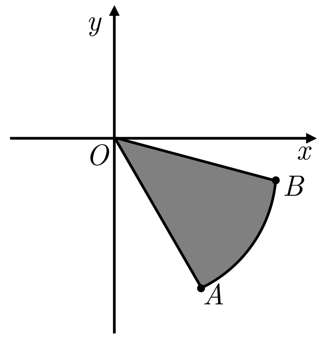
Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = 2\,cis\,\frac{5\pi}{3}$, $z_2 = cis\,\frac{\pi}{4}$ e $z_3 = z_1 \times z_2$.

Em relação ao plano complexo da figura, sabe-se que:

- $\widehat{AB}$ é o arco de uma circunferência de centro na origem do referencial;
- O ponto A é a imagem geométrica de z_1;
- O ponto B é a imagem geométrica de z_3 .



1.1. Considere o número complexo $\left(\frac{z_1 + \sqrt{3}\ i}{i}\right)^{27}$.

Sem recorrer à calculadora, escreva-o na forma algébrica.

1.2. Justifique que $(z_2)^{12}$ é um número real.

1.3. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, incluindo a fronteira.

2. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, o número $w = 2\sqrt{3} + 8\ i$.

2.1. É dada, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 = \overline{w} - 10\sqrt{3}$.

Calcule a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da equação anterior.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Mostre que* $z^4 = 16cis\,\frac{7\pi}{6}$.
- *Resolva a equação dada, apresentando as soluções o mais simplificadamente possível.*
- *Esboce, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da equação dada.*
- *Calcule a área pedida.*

2.2. Seja α um argumento do número complexo w e seja z um número imaginário puro tal que $Im(z) > 0$.

Escreva, na forma trigonométrica, o produto do simétrico de w por z .

3. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo de seis minutos da experiência, de acordo com a função

$$v(t) = \frac{1008}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{9}\ t\right) + 56\sqrt{3}\ t - 370\ ,\quad 1 \le t \le 7$$

onde t designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do minuto 1 até ao minuto 7, e $v(t)$ designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em **centenas** de rotações por minuto).

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, ao longo desses seis minutos da experiência.
Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto, arredondado às décimas.

3.2. Durante essa experiência, foi também possível concluir que o consumo de combustível do motor está relacionado, aproximadamente, com a função

$$c(t) = 5\,\mathrm{sen}(0{,}785t - 0{,}5) + \sqrt{3}\ t - 1{,}04\ ,\quad 1 \le t \le 7$$

em que $c(t)$ é o consumo de combustível do motor, em litros por 100 km, após t minutos.

3.2.1. Calcule o consumo de combustível do motor após 90 segundos.
Apresente o resultado em litros por 100 km, arredondado às décimas.

3.2.2. Suponha que, num dado momento, o consumo de combustível do motor é igual 4 a litros por 100 km. Qual é a velocidade de rotação do seu eixo?
Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, duas casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

4. O Ezequias descarrega pequenos programas (gratuitamente) da Internet mas não gosta muito da velocidade de *download*. Cada um desses programas demora 1 minuto a ser descarregado.
Ele estima que, durante esse minuto, o número de KB por segundo é dado aproximadamente por

$$d(t) = 50 + 0{,}5\ t\ \ \mathrm{sen}\left(0{,}005t^2\right),\quad 0 \le t \le 60$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos e a variável t está em segundos).

O Ezequias quer mudar de servidor de Internet mas ele só o fará se não se verificar nenhuma das seguintes três condições:

- Inicialmente, a velocidade de *download* tem de ser maior que 100 KB por segundo;
- A velocidade máxima de *download* tem de ser superior a 80 KB por segundo;
- A velocidade de *download* tem de ser superior a 65 KB por segundo durante, pelo menos, 10 segundos.

Irá o Ezequias mudar de servidor?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$

$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n cis\,(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Políg. regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (146 pontos)	1. ....48 1.1. ....17 1.2. ....14 1.3. 17	2. ....34 2.1. ....20 2.2. 14	3. ....46 3.1. ....18 3.2.1. ....10 3.2.2. 18	4. 18

O professor: RobertOliveira