



**6.º TESTE DE MATEMÁTICA A**

**12.º 2**

www.ebsaas.com

3.º Período

27/05/08

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Classificação:   ,

0 professor:

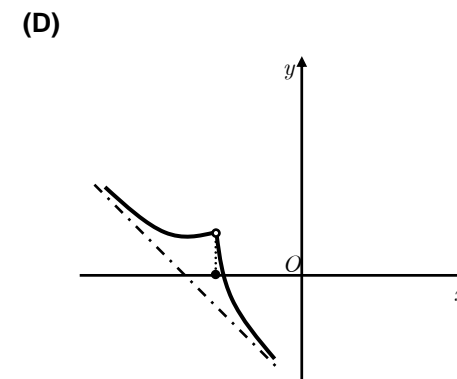
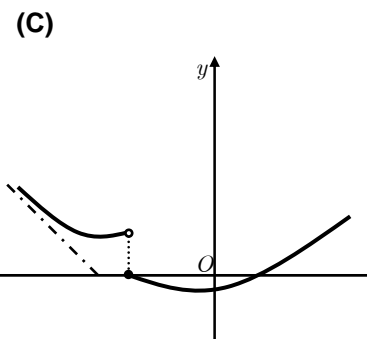
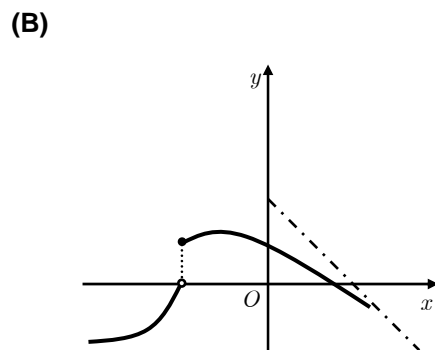
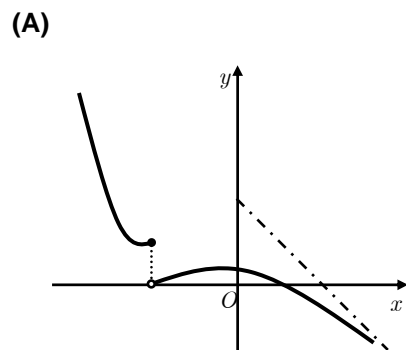
**Grupo I**

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = 0$$

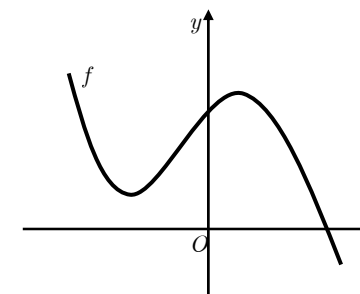
Qual dos seguintes pode representar o gráfico de  $g$  ?



2. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função cúbica  $f$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$  ?

- (A)  $+\infty$                       (B)  $-\infty$   
 (C) 0                                (D) 1



3. De uma função  $f$ , derivável em  $\mathbb{R}^+$ , sabe-se que:

- o seu contradomínio é igual a  $[0, 4]$ ;
- 1 é um minimizante e 3 é um maximizante;
- $t$  é a recta tangente ao gráfico de  $f$  nos pontos de abcissa 1 e 3.

Qual das seguintes pode representar uma equação de  $t$  ?

- (A)  $y = 4x + 1,5$     (B)  $y = 1,5x + 4$     (C)  $y = 4$                       (D)  $y = 1,5$

4. Seja  $h$  uma função de domínio  $] - 1, +\infty[$ . Sabe-se que a **Segunda Derivada** de  $h$ , também de domínio  $] - 1, +\infty[$ , está definida por  $h''(x) = (x - 3)^2 \ln(x + 1)$ . Relativamente ao gráfico da função  $h$ , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A concavidade está voltada para baixo no intervalo  $] - 1, 3]$ .
- (B) A concavidade está voltada para baixo no intervalo  $]3, +\infty[$ .
- (C) O ponto de abcissa 0 é um ponto de inflexão.
- (D) O ponto de abcissa 3 é um ponto de inflexão.

5. “Havia ainda a probabilidade de as autoridades o considerarem culpado de conivência no crime.”  
A SANGUE FRIO, Truman Capote

Várias pessoas vão ser julgadas num tribunal. Considere os acontecimentos  $A$  e  $B$ :

$A$  – «a pessoa é do sexo masculino»;

$B$  – «a pessoa é culpada».

Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa que vai ser julgada.

Sabe-se que  $P(A) = 0,7$  e que  $P(A \cap B) = 0,3$ .

Qual é o valor de  $P(\bar{B} | A)$ ?

- (A)  $\frac{4}{7}$
- (B)  $\frac{5}{8}$
- (C)  $\frac{2}{9}$
- (D)  $\frac{3}{10}$

6. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, a bissetriz dos quadrantes ímpares?

- (A)  $\text{Arg}(z) = \pi$
- (B)  $|z| = 1$
- (C)  $2 \text{Re}(z) + \text{Im}(\bar{z}) = \text{Im}(z)$
- (D)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0$

### Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

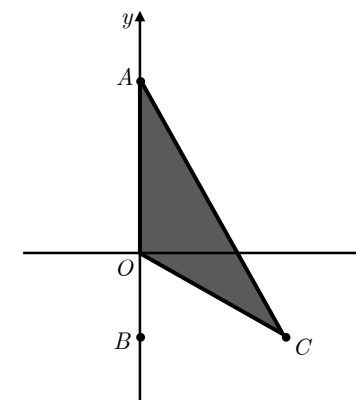
**Atenção:** Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. “Até mesmo para Jolene, uma rapariguinha tão infantil, o rosto ascético e triangular de Mrs. Clutter, o seu ar a um tempo caseiro e angelical, despertavam um instinto de compaixão protectora.”  
A SANGUE FRIO, Truman Capote

No plano complexo da figura, considere o triângulo isósceles  $[ACO]$ .

Tal como a figura sugere:

- $A$  pertence ao semi-eixo positivo  $Oy$  e é a imagem geométrica de um número complexo  $z$ ;
- $B$  pertence ao semi-eixo negativo  $Oy$  e é a imagem geométrica de um número complexo de módulo igual a metade de  $|z|$ ;
- $C$  pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um número complexo  $w$  de módulo igual a  $|z|$ ;
- $BC$  é uma recta paralela ao eixo  $Ox$ .



1.1. Suponha que, nesta alínea,  $w = 3 \text{cis} \frac{11\pi}{6}$ .

Sem usar a calculadora, calcule na forma trigonométrica, o produto entre o simétrico de  $w$  e o conjugado de  $w$ .

1.2. Sabendo que a área do triângulo  $[ACO]$  é igual a  $3\sqrt{3}$ , escreva, na forma algébrica,  $z$ .

2. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja  $w = 2 - 2i$ .

**Sem usar a calculadora** (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

2.1. Calcule  $a$  e  $b$  de modo que se tenha  $a + 2i + bi = \frac{w}{1-3i}$ .

2.2. Mostre que é um imaginário puro o número  $\frac{2i^{51} \times \text{cis } \frac{17\pi}{18}}{\text{cis } \frac{4\pi}{9}} - w$ .

2.3. Calcule, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas do número complexo  $w$ , simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado o quadrilátero  $[ABCD]$ . Sabe-se que:

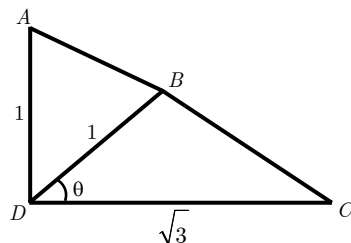
- $\theta$  é a amplitude, em radianos, do ângulo

$$\angle BDC \left( \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right];$$

- $[AD] \perp [DC]$ ;

- $\overline{AD} = \overline{BD} = 1$ ;

- $\overline{CD} = \sqrt{3}$ .



3.1. Mostre que a área do quadrilátero  $[ABCD]$  é dada, em função de  $\theta$ , pela função definida por  $f(\theta) = \text{sen} \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$

**Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:**

- escreva uma expressão, em função de  $\theta$ , para a área do triângulo  $[BCD]$ ;
- identifique, no triângulo  $[ABD]$ , a amplitude  $\theta$ ;
- escreva uma expressão, em função de  $\theta$ , para a área do triângulo  $[ABD]$ ;
- mostre que  $f(\theta)$  é a área pedida.

3.2. **Sem usar a calculadora**, determine o valor de  $\theta$  para o qual é máxima a área do quadrilátero  $[ABCD]$ .

4. Sobre o número de aves, em milhares, numa reserva natural,  $t$  anos após o início de 1980, constatou-se o seguinte:

- No início de 1980 havia, pelo menos, 3 mil aves;
- Nunca chegou a haver menos de duas mil aves durante mais de um ano;
- A reserva não pode comportar mais de 12 mil aves.

Para tentar arranjar um modelo matemático simples que desse o número de aves nessa reserva,  $t$  anos após o início de 1980, chegou-se à seguinte função:

$$A(t) = 10 - 6e^{-t} (1,1t^3 + \cos t), \quad t \geq 0$$

(o argumento da função co-seno está expresso em radianos).

Tendo em conta as três características anteriores, será este modelo matemático adequado?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, explicitie as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

### COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0		
<b>Grupo II</b> (140 pontos)	1. .... 34 1.1. .... 16 1.2. .... 18	2. .... 50 2.1. .... 16 2.2. .... 16 2.3. .... 18	3. .... 37 3.1. .... 20 3.2. .... 17	4. .... 19