



6.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

www.ebsaas.com

3.º Período

27/05/08

Duração: 90 minutos

Nome: _____ N.º: _____ Classificação: ,

0 professor:

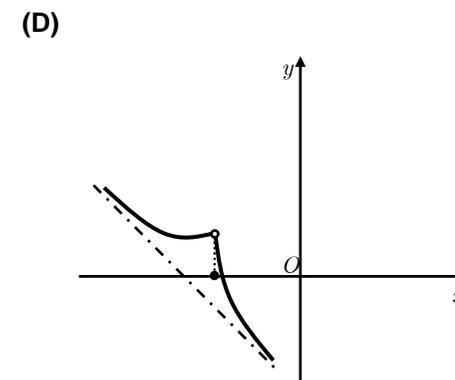
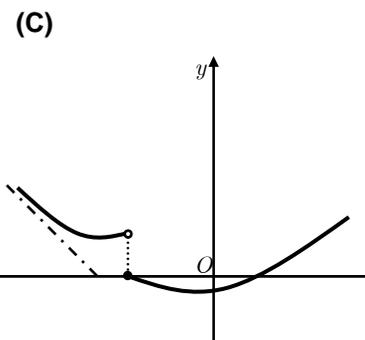
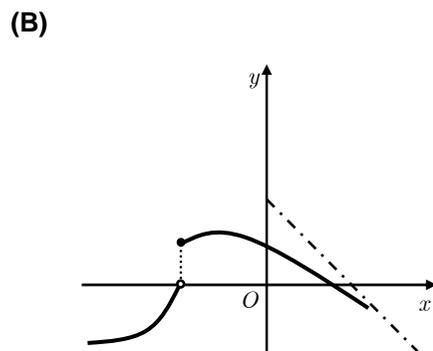
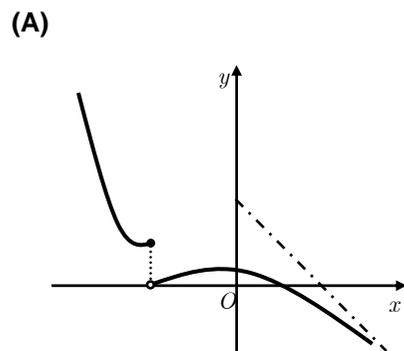
Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere uma função g , de domínio \mathbb{R} , tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = 0$$

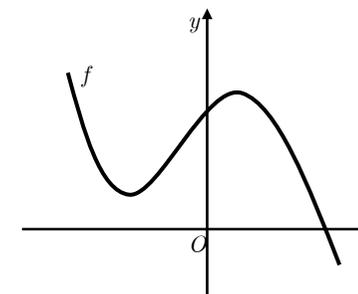
Qual dos seguintes pode representar o gráfico de g ?



2. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função cúbica f .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$?

- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$
 (C) 0 (D) 1



3. De uma função f , derivável em \mathbb{R}^+ , sabe-se que:

- o seu contradomínio é igual a $[0, 4]$;
- 1 é um minimizante e 3 é um maximizante;
- t é a recta tangente ao gráfico de f nos pontos de abcissa 1 e 3.

Qual das seguintes pode representar uma equação de t ?

- (A) $y = 4x + 1,5$ (B) $y = 1,5x + 4$ (C) $y = 4$ (D) $y = 1,5$

4. Seja h uma função de domínio $] - 1, +\infty[$. Sabe-se que a **Segunda Derivada** de h , também de domínio $] - 1, +\infty[$, está definida por $h''(x) = (x - 3)^2 \ln(x + 1)$. Relativamente ao gráfico da função h , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $] - 1, 3]$.
- (B) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $]3, +\infty[$.
- (C) O ponto de abcissa 0 é um ponto de inflexão.
- (D) O ponto de abcissa 3 é um ponto de inflexão.

5. “Havia ainda a probabilidade de as autoridades o considerarem culpado de conivência no crime.”
A SANGUE FRIO, Truman Capote

Várias pessoas vão ser julgadas num tribunal. Considere os acontecimentos A e B :
 A – «a pessoa é do sexo masculino»;
 B – «a pessoa é culpada».

Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa que vai ser julgada.
Sabe-se que $P(A) = 0,7$ e que $P(A \cap B) = 0,3$.

Qual é o valor de $P(\bar{B} | A)$?

- (A) $\frac{4}{7}$
- (B) $\frac{5}{8}$
- (C) $\frac{2}{9}$
- (D) $\frac{3}{10}$

6. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, a bissetriz dos quadrantes ímpares?

- (A) $\text{Arg}(z) = \pi$
- (B) $|z| = 1$
- (C) $2 \text{Re}(z) + \text{Im}(\bar{z}) = \text{Im}(z)$
- (D) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0$

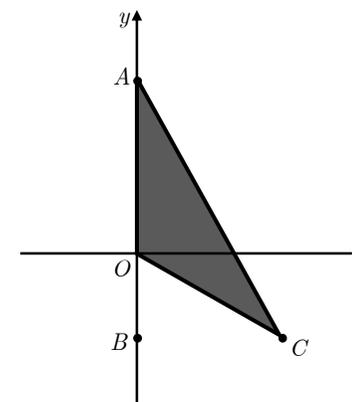
Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. “Até mesmo para Jolene, uma rapariguinha tão infantil, o rosto ascético e triangular de Mrs. Clutter, o seu ar a um tempo caseiro e angelical, despertavam um instinto de compaixão protectora.”
A SANGUE FRIO, Truman Capote

No plano complexo da figura, considere o triângulo isósceles $[ACO]$.
Tal como a figura sugere:



- A pertence ao semi-eixo positivo Oy e é a imagem geométrica de um número complexo z ;
- B pertence ao semi-eixo negativo Oy e é a imagem geométrica de um número complexo de módulo igual a metade de $|z|$;
- C pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um número complexo w de módulo igual a $|z|$;
- BC é uma recta paralela ao eixo Ox .

1.1. Suponha que, nesta alínea, $w = 3 \text{cis} \frac{11\pi}{6}$.

Sem usar a calculadora, calcule na forma trigonométrica, o produto entre o simétrico de w e o conjugado de w .

1.2. Sabendo que a área do triângulo $[ACO]$ é igual a $3\sqrt{3}$, escreva, na forma algébrica, z .

2. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $w = 2 - 2i$.

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

2.1. Calcule a e b de modo que se tenha $a + 2i + bi = \frac{w}{1-3i}$.

2.2. Mostre que é um imaginário puro o número $\frac{2i^{51} \times \text{cis } \frac{17\pi}{18}}{\text{cis } \frac{4\pi}{9}} - w$.

2.3. Calcule, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas do número complexo w , simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado o quadrilátero $[ABCD]$. Sabe-se que:

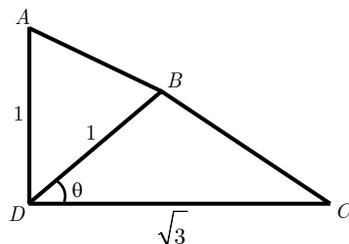
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo

$$\angle BDC \left(\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right);$$

- $[AD] \perp [DC]$;

- $\overline{AD} = \overline{BD} = 1$;

- $\overline{CD} = \sqrt{3}$.



3.1. Mostre que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada, em função de θ , pela função definida por $f(\theta) = \text{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- escreva uma expressão, em função de θ , para a área do triângulo $[BCD]$;
- identifique, no triângulo $[ABD]$, a amplitude θ ;
- escreva uma expressão, em função de θ , para a área do triângulo $[ABD]$;
- mostre que $f(\theta)$ é a área pedida.

3.2. **Sem usar a calculadora**, determine o valor de θ para o qual é máxima a área do quadrilátero $[ABCD]$.

4. Sobre o número de aves, em milhares, numa reserva natural, t anos após o início de 1980, constatou-se o seguinte:

- No início de 1980 havia, pelo menos, 3 mil aves;
- Nunca chegou a haver menos de duas mil aves durante mais de um ano;
- A reserva não pode comportar mais de 12 mil aves.

Para tentar arranjar um modelo matemático simples que desse o número de aves nessa reserva, t anos após o início de 1980, chegou-se à seguinte função:

$$A(t) = 10 - 6e^{-t} (1,1t^3 + \cos t), \quad t \geq 0$$

(o argumento da função co-seno está expresso em radianos).

Tendo em conta as três características anteriores, será este modelo matemático adequado?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, explicitie as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0		
Grupo II (140 pontos)	1. 34 1.1. 16 1.2. 18	2. 50 2.1. 16 2.2. 16 2.3. 18	3. 37 3.1. 20 3.2. 17	4. 19