

**2.º TESTE DE MATEMÁTICA A**

**12.º 1 (recorrente)**

Módulo 9 – Trigonometria e Números Complexos

01/06/10

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:

O professor: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

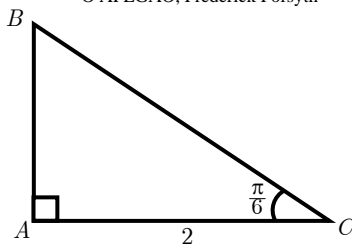
1. “Esta seria evidentemente uma viagem triangular para um navio de carga britânico.”

O AFEGÃO, Frederick Forsyth

Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$ , rectângulo em  $A$ .

Sabe-se que  $\overline{AC} = 2$  e que a amplitude do ângulo  $ACB$  é igual a  $\frac{\pi}{6}$ .

Qual é o valor de  $\overline{AB}$  ?



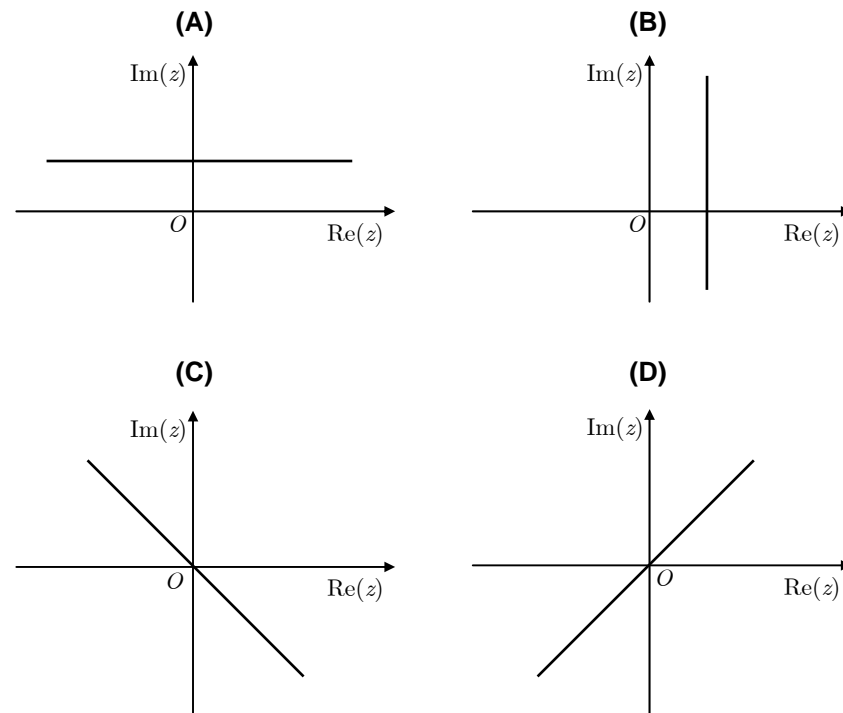
- (A)  $\sqrt{3}$       (B)  $2\sqrt{3}$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (D)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Considere o número complexo  $z = 1 + bi$ , em que  $b < 0$ .

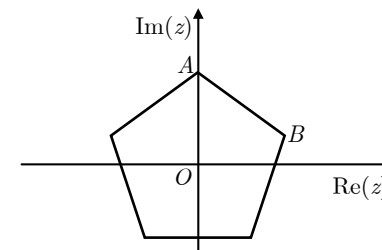
Dos seguintes números, qual é o que pode representar o número  $\bar{z}$ , conjugado do complexo  $z$  ?

- (A)  $\text{cis } \frac{2\pi}{5}$       (B)  $\text{cis } \frac{5\pi}{6}$       (C)  $\text{cis } \frac{9\pi}{7}$       (D)  $\text{cis } \frac{15\pi}{8}$

3. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos pela condição, definida em  $\mathbb{C}$ , por  $iz = \bar{z}$  ?



4. Na figura está representado um pentágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 5 de um certo número complexo. Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem a esse pentágono; O ponto  $A$  pertence ao eixo  $Oy$ ; O ponto  $B$  pertence primeiro quadrante.



Qual dos seguintes números complexos pode ter por imagem geométrica o vértice  $B$  ?

- (A)  $\text{cis } \frac{\pi}{5}$       (B)  $\text{cis } \frac{\pi}{7}$       (C)  $\text{cis } \frac{\pi}{10}$       (D)  $\text{cis } \frac{\pi}{12}$

5. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sabe-se que o número complexo  $(1 - i)^n$  é um imaginário puro. Indique dois possíveis valores para  $n$ .
- (A) 2 e 6      (B) 2 e 4      (C) 3 e 7      (D) 3 e 5

**Grupo II**

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. O Ildefonso fez a seguinte experiência: tirou um cubo de gelo do congelador, deixou-o à temperatura ambiente durante alguns minutos, voltou a meter o cubo no congelador e tirou-o novamente passado algum tempo. Considere que, nos primeiros 9 minutos da experiência, a temperatura do cubo de gelo (em graus Celsius) foi dada, após  $t$  minutos, pela função definida por

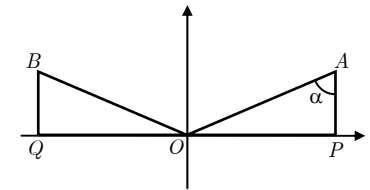
$$f(t) = \frac{2}{3}t + 2 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) - 10 \quad (\text{a variável } t \text{ vem em radianos})$$

- 1.1. Usando exclusivamente métodos analíticos (e a calculadora para eventuais cálculos numéricos), determine quanto tempo passou desde que o cubo de gelo foi reintroduzido no congelador até ser novamente retirado. Apresente o resultado em minutos e segundos (com estes arredondados às unidades). Em caso de cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.
- 1.2. Durante a experiência, quantas vezes a temperatura do cubo de gelo foi igual a  $-8$  graus Celsius? **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, indique, em minutos e arredondado às centésimas, quanto tempo passou para cada caso. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinala o(s) ponto(s) relevante(s) para a resolução do problema.
2. Considere, no conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , o número  $z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ .
- 2.1. Sejam  $A$  a imagem geométrica de  $z$  e  $B$  a imagem geométrica de  $z^4$ . Sendo  $O$  a origem do referencial no plano complexo, **represente** o triângulo  $[ABO]$  nesse plano e **determine** a sua área.
- 2.2. Determine, na forma trigonométrica, todas as raízes de índice  $n$  de  $z$  sabendo que as suas imagens geométricas formam os vértices de um triângulo equilátero.

3. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam
- $$w_1 = 2 + i, \quad w_2 = a + 3b + i^{87} \quad \text{e} \quad w_3 = 3 + \sqrt{3}i$$
- $a$  e  $b$  são números reais. Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.
- 3.1. Os números  $w_1$  e  $w_2$  podem ser iguais? Justifique a resposta.
- 3.2. Resolva, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $5z + 2i = w_1 - 1 + zi$ , apresentando a sua solução na forma algébrica.
- 3.3. Calcule  $\frac{(w_3 - 4)^4}{4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}}$  apresentando o resultado final na forma trigonométrica.
- 3.4. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em  $\mathbb{C}$ , por:

$$|z - w_1| \leq |w_3| \wedge \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

4. Na figura estão representados, no plano complexo, dois triângulos rectângulos geometricamente iguais,  $[OPA]$  rectângulo em  $P$  e  $[OQB]$  rectângulo em  $Q$ .



Sabe-se que:

- Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem ao eixo real;
- $\alpha$  é a amplitude do ângulo  $AOP$ ;
- $\frac{AP + OP}{OP} = \sqrt{2}$

Suponha que  $z$  é a imagem geométrica de  $B$ .

Admitindo que  $OP = 1$  e  $\alpha = 67,5^\circ$ , escreva  $z$  na forma algébrica e indique um seu argumento.

**FIM**

**COTAÇÕES**

<b>Grupo I</b> (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	---------------------------	---------------------------------------------------

<b>Grupo II</b> (150 pontos)	1.....35	2.....34	3.....64	4.....17
	1.1.....19	2.1.....17	3.1.....13	
	1.2.....16	2.2.....17	3.2.....17	
			3.3.....17	
		3.4.....17		