Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2005/2006)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 3

3.º Período –05/05/06 **Duração: 90 minutos**

Nome: ________________________________ **N.º:** _____ **Classificação:** [ ][ ] , [ ]

O professor:

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. "- *Eu vou à pesca porque a pesca é uma actividade cheia de probabilidades, só que, para estabelecer essa rede de probabilidades, precisamos de ter uma variante qualquer. E uma regra que valha para a maior parte do tempo. Estou ali um dia inteiro, o peixe vem ou não vem, esconde-se numa curva ou suicida-se num anzol.*"

UM CRIME NA EXPOSIÇÃO, Francisco José Viegas

Geralmente, dois em cada cinco peixes que o Eustáquio pesca no rio são salmões. Se ele ao fim do dia chegar a casa com vinte peixes, a probabilidade de **metade** serem salmões é, aproximadamente, igual a:

(A) $0{,}117$ **(B)** $0{,}245$ **(C)** $0{,}395$ **(D)** $0{,}872$

2. De uma escola, sabe-se que:
- 40% dos alunos são do sexo masculino;
- 30% dos alunos gostam de ler poesia;
- 15% das meninas gostam de ler poesia.

Ao seleccionar aleatoriamente um aluno dessa escola, qual é a probabilidade de ele ser um rapaz e não gostar de ler poesia?

(A) 19% **(B)** 21% **(C)** 28% **(D)** 55%

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{ln(3x+1)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Relativamente à continuidade da função f no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua à direita e descontínua à esquerda

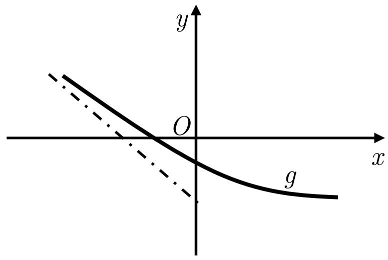
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita

(C) É contínua à esquerda e à direita

(D) É descontínua à direita e à esquerda

4. Na figura ao lado estão representados o gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, e a sua única assimptota.

Quanto ao valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{sen\ x}{g(x)}$:



(A) Não existe

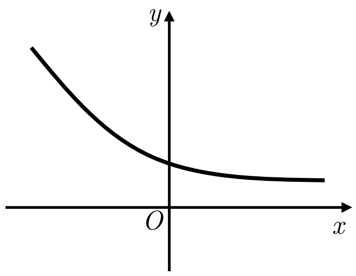
(B) Ele é igual a $+\infty$

(C) Ele é igual a -1

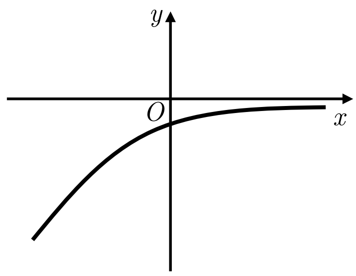
(D) Ele é igual a 0

5. De uma função h, **estritamente decrescente** em $\mathbb{R}$, sabe-se que $h''(x) = h'(x) - e^x$.
Qual, das seguintes representações gráficas a seguir, pode ser a da **segunda derivada de** h ?

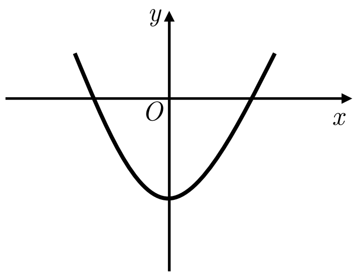
(A)



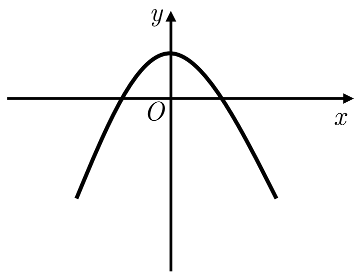
(B)



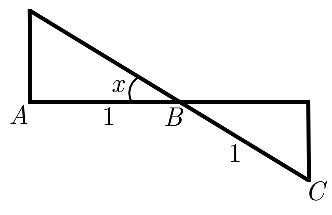
(C)



(D)



6. Considere os dois triângulos semelhantes da figura ao lado. Sendo $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$, qual, das expressões seguintes, dá a soma da área dos dois triângulos em função de x ?



(A) $\frac{sen\ x\ +\ tg\ x}{2}$

(B) $\frac{sen\ x \times cos\ x\ +\ tg\ x}{2}$

(C) $cos\ x + tg\ x$

(D) $\frac{sen\ x\ \times\ cos\ x}{tg\ x}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, sabe-se que a sua **derivada**, também de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, está definida por $f'(x) = \frac{x}{\ln x}$.

1.1. Sabe-se que os gráficos da função f e de $y = x^2$ admitem, num mesmo ponto, a mesma recta tangente. **Sem recorrer à calculadora**, determine a abcissa desse ponto.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

1.3. Sobre a função g e a sua **derivada**, ambas de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, sabe-se que g possui apenas um extremo relativo e que $g'(x) = f'(x) + 1$.
Recorrendo à sua calculadora, indique a natureza desse extremo e determine um valor arredondado às centésimas para a sua abcissa.
Explique como procedeu.

2. **2.1.** Seja g a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, dada por $g(x) = 10 + 2,5x + sen(5x)$.
Sem usar a calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

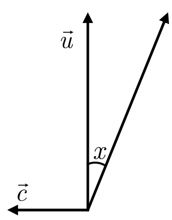
2.1.1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - 10}{x}$.

2.1.2. Mostre que g tem um mínimo.

2.2. "*Logo a seguir à ponte da baía, Kelly desligou o piloto automático e virou dez graus para bombordo.*"

SEM REMORSOS, Tom Clancy

Considere a figura ao lado em que o vector $\vec{u}$ representa a direcção a seguir por um certo barco, o vector $\vec{d}$ representa a direcção que o barco **deve** seguir para vencer a corrente (vector $\vec{c}$ perpendicular a $\vec{u}$) e x é a amplitude do ângulo entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{d}$.



Admita que a função g relaciona a profundidade, em metros, do local onde se encontra esse barco em função de x.

2.2.1. Qual é a profundidade do local onde se encontra o barco, se a velocidade da corrente for nula?

2.2.2. Num certo momento, o capitão do barco calcula que o comprimento do vector $\vec{u}$ é igual a $\sqrt{3}$ e o de $\vec{c}$ é igual a 1. Determine a profundidade nesse local.
Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.

2.2.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:
Qual deve ser, em radianos e a menos de 0,01, o valor de x de modo que o barco esteja a navegar numa zona onde a profundidade é igual a 10,5 metros?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como abcissas relevantes de algum ponto (arredondadas às milésimas).

3. A função h está definida por $h(x) = 1 - 3cos^2 x$.

Considere $\alpha \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Prove que, se $tg(\pi - \alpha) = \sqrt{2}$, então α é um zero de h.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (146 pontos)	**1.**..........48 **1.1.**..........15 **1.2.**..........18 **1.3.**..........15	**2.**..........82 **2.1.1.**..........17 **2.1.2.**..........19 **2.2.1.**..........12 **2.2.2.**..........17 **2.2.3.**..........17	**3.**..........16

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira