Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2005/2006)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 1

3.º Período –04/05/06 **Duração: 90 minutos**

Nome: ______________________________ **N.º:** _____ **Classificação:** ☐☐ , ☐

O professor:

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Numa certa linha do triângulo de Pascal, a soma dos dois últimos elementos é 16.
Então, o produto do quarto pelo quinto elementos da linha **anterior** é:

(A) 204.204 **(B)** 364.364 **(C)** 621.075 **(D)** $2.004.002$

2. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes.
Seja X a variável aleatória que designa o «*número de vezes que, nesses dois lançamentos, sai face par*». A distribuição de probabilidades da variável X está representada ao lado.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

x_i	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	a	b

(A) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$ **(B)** $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{4}$ **(C)** $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$ **(D)** $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

3. "*- Agora, pense: nunca ninguém tocou nesse dinheiro e o depósito foi feito há quase cem anos e desde então tem acumulado juros.*"
O COMEDOR DE PÉROLAS, João Aguiar

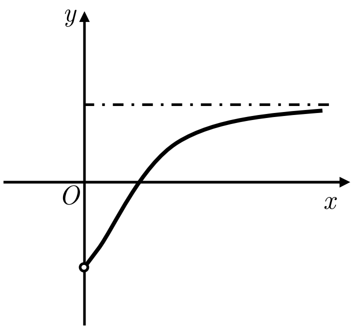
A relação entre uma quantia inicial Q_0 depositada num banco e a quantia acumulada Q após n anos é dada pela expressão $\frac{Q}{Q_0} = 1,07^n$.
Qual é o valor (aproximado) de n de modo que a quantia acumulada seja 1000 vezes superior à quantia inicial?

(A) 103 **(B)** 102 **(C)** 101 **(D)** 100

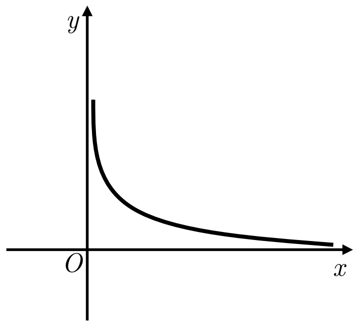
4. De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Qual, das seguintes representações gráficas a seguir, pode ser a da função f ?

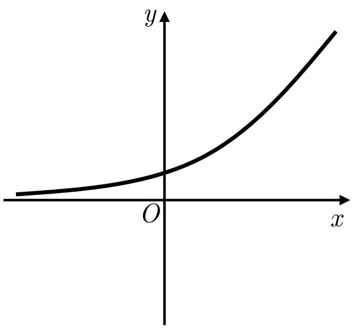
(A)



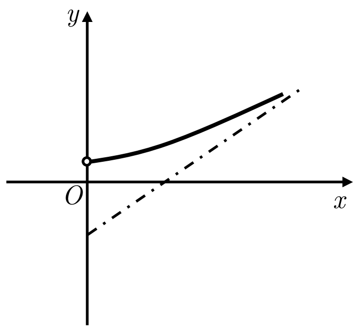
(B)



(C)



(D)

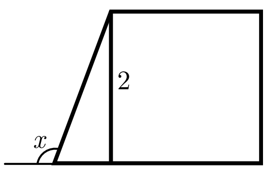


5. Para um certo valor de k, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função g definida por $g(x) = \begin{cases} \pi^{x-\mathrm{k}} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{sen(\pi x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 0 **(C)** -1 **(D)** -2

6. Na figura está representado um polígono constituído por um triângulo rectângulo e um quadrado, ambos de altura 2.
Seja A a função que dá a área do polígono em função de x.
Qual das expressões seguintes pode ser a de A ?



(A) $4 - \frac{2}{cos\, x}$ **(B)** $4 + \frac{2}{tg\, x}$ **(C)** $4 - \frac{2}{tg\, x}$ **(D)** $4 - 6\, tg\, x$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

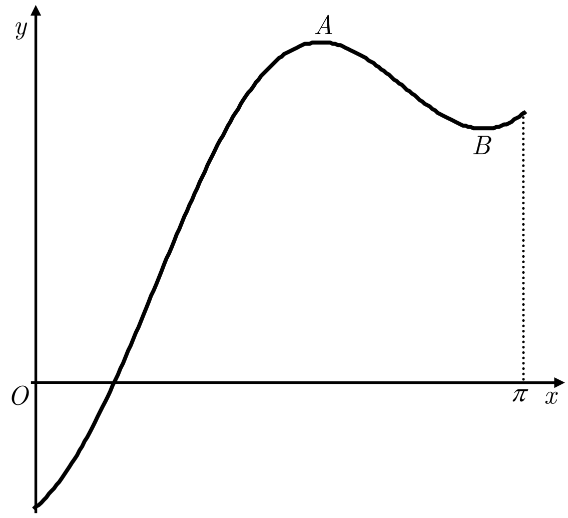
1. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $f(e)=\frac{4}{3}$ e a que sua **derivada**, também de domínio $\mathbb{R}^+$, está definida por $f'(x)=\frac{\ln x}{3x}$.

1.1. Sem recorrer à calculadora, escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes **pares**. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.
Explique como procedeu.

2. O gráfico que se reproduz ao lado em referencial o.n. é da função definida por $g(x)=x+sen\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$, em que $x\in[0,\pi]$.
A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de g.



2.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

2.1.1. Prove que $g(x)=x-cos(2x)$.

2.1.2. Mostre que a abcissa do ponto A é $\frac{7\pi}{12}$ e calcule a abcissa do ponto B.

2.1.3. Determine o contradomínio de g.

2.2. Recorrendo à calculadora, resolva a inequação $g(x)\geq x$, no intervalo $[0,\pi]$.
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).
Nos cálculos intermédios, use duas casas decimais.

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

Seja h a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $h(x)=\frac{2x+cos\, x}{f(x)}$

Prove que a recta de equação $y=2$ é assimptota do gráfico de h.

4. "*A sala insonorizada do* [*submarino*] Charlotte – *concebida a partir de uma estrutura similar nos Bell Laboratories – era aquilo que formalmente se designa como câmara sem ecos. Sendo uma sala com isolamento acústico, sem superfícies paralelas ou reflectoras, absorvia o som com uma eficácia de 99,4 por cento.*"

A CONSPIRAÇÃO, Dan Brown

Um submarino percorre o oceano, fazendo um teste de velocidade. Inicialmente a uma velocidade de 10 nós, o submarino aumenta a velocidade, vindo depois a baixar e, após cerca de 3 horas, voltar de novo a aumentar a velocidade, mas nunca ultrapassando os 25 nós.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função V que dá a velocidade aproximada do submarino após t horas.

(A) $t^3 - 6t^2 + 7t + 10$

(B) $0,1t^2 + sen(2t) + 15$

(C) $25 - \frac{15(t^3+1)}{e^t}$

(D) $\frac{25}{1+1,5\ e^{-t}}$

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões (**apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada**).
Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s).**

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (146 pontos)	**1.**..........48 **1.1.**..........15 **1.2.**..........18 **1.3.**..........15	**2.**..........66 **2.1.1.**..........16 **2.1.2.**..........18 **2.1.3.**..........16 **2.2.**..........16	**3.**..........16	**4.**..........16

Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$

$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira