Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2004/2005)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 5

Duração: 90 minutos **Classificação:** ___ , ___
3.º Período –27/04/05

Nome:________________________________ **N.º:**______ **O professor:**

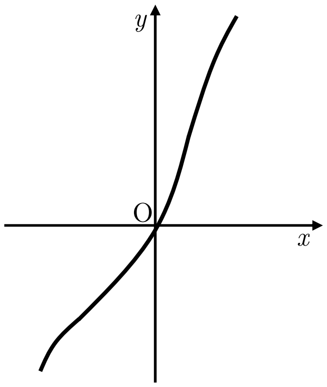
Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

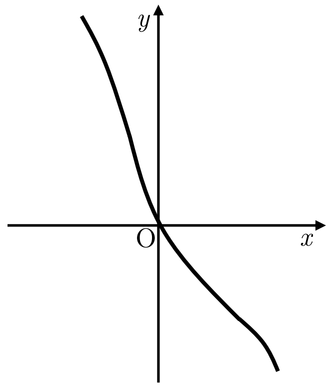
1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, e tal que a **primeira derivada** está definida por $f'(x) = cos\, x - 2$.

Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico de f ?

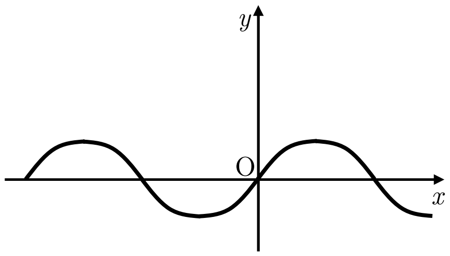
(A)



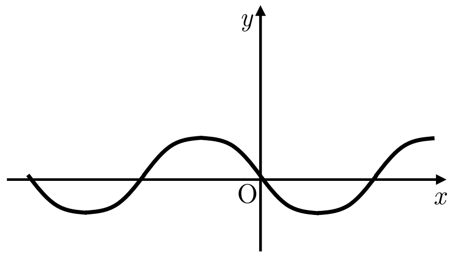
(B)



(C)



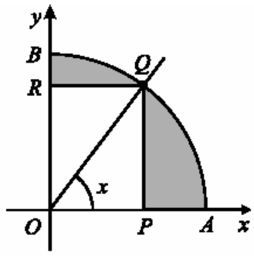
(D)



2. De uma função real g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que $g''(x) \neq 0$ e que a recta de equação $y = 2$ é a única assimptota do gráfico de g.
Dada a sucessão definida por $u_n = \sqrt{n}$, qual é a proposição **falsa**?

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(-u_n) = -2$ **(B)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(-u_n) = 2$ **(C)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$ **(D)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(-u_n) = -\infty$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência (de raio 1) AB, de centro na origem do referencial.
O ponto Q move-se ao longo desse arco. Os pontos P e R, situados sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q, de tal forma que o segmento de recta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de recta $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox.
Para cada posição do ponto Q, seja x a amplitude do ângulo AOQ.



Qual das expressões seguintes dá a área do rectângulo $[OPQR]$ em função de x?

(A) $\frac{sen\ x}{cos\ x}$ **(B)** $sen\, x \times cos\, x$ **(C)** $sen^2 x$ **(D)** $cos^2 x$

4. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se } x>0 \\ 4 & \text{se } x=0 \\ \frac{x}{e^{4x}-1} & \text{se } x<0 \end{cases}$.

Relativamente à continuidade da função h no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua à direita e descontínua à esquerda **(B)** É contínua à esquerda e descontínua à direita

(C) É descontínua à esquerda e à direita **(D)** É contínua à direita e à esquerda

5. Numa prateleira de um supermercado com cem embalagens de mostarda, há **duas** embalagens fora do prazo de validade. Sabe-se que a probabilidade de o conteúdo destas embalagens estar estragado é igual a $0{,}4$. Se a mostarda estiver dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragada é $0{,}01$.
Escolhe-se, ao acaso, uma embalagem de mostarda **estragada**.
Qual é a probabilidade de ela estar fora de prazo?

(A) $\frac{10}{29}$ **(B)** $\frac{20}{41}$ **(C)** $\frac{30}{53}$ **(D)** $\frac{40}{89}$

6. Em cada cinco remates à baliza, o andebolista Anselmo marca três golos (em média). Seja X a variável "*número de golos marcado pelo Anselmo em cada dois remates*".
Qual é a distribuição de probabilidades de variável X ?

(A)

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

(B)

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

(C)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2$

(D)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2$	$2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Uma espécie de tigres está ameaçada de extinção. Admita que o número de exemplares, em **milhares**, é dado por $f(t) = \mathrm{k}e^{-0{,}027t}$, para certos valores de t.

(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano 2000).

1.1. Nesta alínea, considere $\mathrm{k} = 6{,}86$.

De acordo com este modelo matemático, qual será a população desta espécie de tigres no **final** do presente ano (2005)? Apresente o resultado em milhares de tigres, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. Verifique que, para qualquer valor de t, $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às centésimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

1.3. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

*Determine k sabendo que se prevê, no início de 2010, uma **diminuição** do número de tigres à razão de 100 exemplares por ano.*

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere a função g definida em $[0, \pi]$ por $g(x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + x \cdot tg\,\frac{4\pi}{3}$.

2.1. Mostre que $g(x) = sen(2x) + \sqrt{3}\,x$

2.2. **Sem recorrer à calculadora**, calcule $g'(0)$ usando a definição de derivada num ponto.

2.3. **Sem recorrer à calculadora** (excepto para cálculos numéricos), prove que $\exists x \in \left]0, \pi\right[: g(x) = 2$

2.4. Usando **processos analíticos**, mostre que a função g tem máximo relativo para $x = \frac{5\pi}{12}$ e um mínimo relativo para $x = \frac{7\pi}{12}$.

2.5. Seja A o ponto maximizante do gráfico de g. A recta tangente ao gráfico de g no ponto A intersecta o gráfico de g noutro ponto, digamos B.

Determine a abcissa de B.

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Apresente os cálculos intermédios arredondados às centésimas e o valor pedido arredondado às décimas.

3. A função h está definida por $h(x) = tg(0,5x)$.

Prove que, para qualquer $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{1 + tg^2(0,5x)}{2}$

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $(r$ – *raio*$)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada resposta errada: – 2	Cada questão não respondida ou anulada: 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II (140 pontos)		
1. 44	2. 81	3. 15
1.1. 12	2.1. 14	
1.2. 16	2.2. 16	
1.3. 16	2.3. 17	
	2.4. 17	
	2.5. 17	

O professor: RobertOliveira