

**5.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2**

Duração: 90 minutos  
3.º Período - 28/04/05

Classificação:

  , 

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

O professor:

**Grupo I**

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

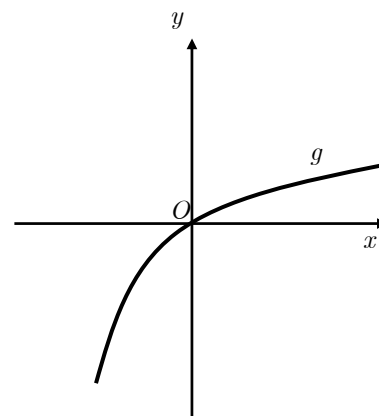
1. Para um certo valor de  $k$ , é **contínua** em  $\mathbb{R}$  a função  $f$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{kx}{\ln(2x + 1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ .

Qual é o valor de  $k$ ?**(A)** 2**(B)** 4**(C)** 6**(D)** 8

2. Ao lado está o gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$  e derivável em  $\mathbb{R}$ .

Qual é, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , a situação possível?

- (A)** Os gráficos de  $g$  e de  $g'$  são simétricos em relação ao eixo  $Ox$ .  
**(B)** Os gráficos de  $g$  e de  $g'$  são simétricos em relação ao eixo  $Oy$ .  
**(C)** Os gráficos de  $g'$  e de  $g''$  são simétricos em relação ao eixo  $Ox$ .  
**(D)** Os gráficos de  $g'$  e de  $g''$  são simétricos em relação ao eixo  $Oy$ .



3. Na figura ao lado encontra-se um pentágono regular de perímetro 10 e apótema  $a$ .

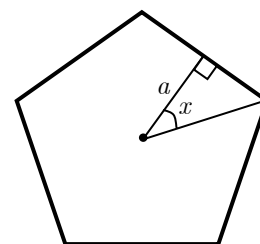
Qual das expressões seguintes dá a área do pentágono em função de  $x$ ?

**(A)**  $\frac{5}{\operatorname{sen} x \times \operatorname{cos} x}$

**(B)**  $5 \operatorname{sen} x \times \operatorname{cos} x$

**(C)**  $\frac{5}{\operatorname{tg} x}$

**(D)**  $5 \operatorname{tg} x$



4. Para poder movimentar as suas contas no sítio da *Internet* de um banco, é necessário a um utilizador ter um código de acesso com sete algarismos para sete posições.  
Quantos códigos existem com exactamente dois algarismos iguais a 0?

(A) 1 820 170                      (B) 1 820 029                      (C) 1 240 170                      (D) 1 240 029

5. Numa estante, estão vários livros.  
Seja  $C$  o acontecimento: «O livro é científico».  
Seja  $D$  o acontecimento: «O livro é didáctico».

Uma das igualdades abaixo indicadas traduz a seguinte afirmação: «Um quarto dos livros científicos da estante são didácticos».  
Qual é essa igualdade?

(A)  $P(C | D) = 0,25$     (B)  $P(D | C) = 0,25$     (C)  $P(C \cup D) = 0,25$     (D)  $P(C \cap D) = 0,25$

6. Sendo  $i$  a unidade imaginária do conjunto  $\mathbb{C}$ , qual é o valor de  $\frac{4 + 3i}{i^{4n + 39}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )?

(A)  $-3 + 4i$                       (B)  $-3 - 4i$                       (C)  $4 + 3i$                       (D)  $4 - 3i$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x-2}{e^x - 1}$ .

**Sem usar a calculadora**, resolva as três alíneas seguintes.

- 1.1. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

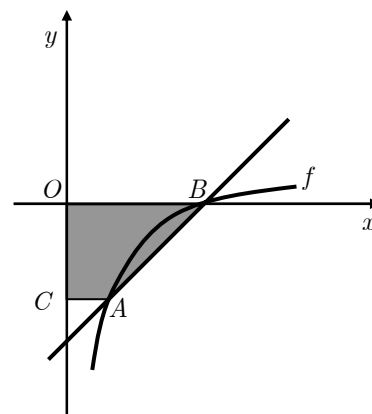
- 1.2. Mostre que  $f(\ln 2) = \ln 2 - 2$ .

- 1.3. Na figura está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , uma parte do gráfico da função  $f$  e o trapézio  $[ABOC]$ .

Os pontos  $A$  e  $B$  são os pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com a recta de equação  $y = x - 2$ .

O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem ordenada igual à de  $A$ .

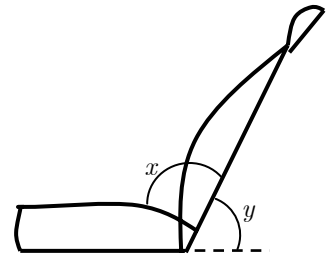
Determine a área do trapézio  $[ABOC]$ .



2. 2.1. Prove que  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

2.2. O Ludovino costuma dormir a sesta no seu automóvel e a duração desta depende da inclinação do encosto da cadeira do automóvel. Ele chegou à conclusão que, consoante a amplitude  $x$  do encosto com a horizontal, o número de horas que ele irá dormir será dado por:

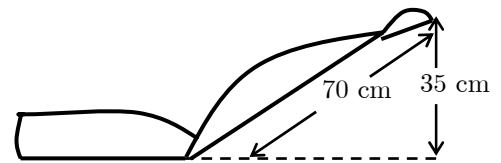
$$h(x) = 4\text{sen } x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})x - 11 \quad \text{sendo } x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$



2.2.1. Quanto tempo dura a sesta do Ludovino, se o valor de  $y$  na figura for igual a  $45^\circ$ ? Apresente o resultado em **minutos**, arredondado às unidades.

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2.2. Determine o tempo de duração da sesta do Ludovino no momento em que a parte superior do encosto se encontra a 35 cm do plano horizontal, sabendo que o comprimento total do encosto é igual a 70 cm.



Apresente o resultado em horas, arredondado às décimas.

2.2.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

*Qual terá de ser a amplitude de  $x$ , para que o Ludovino durma a sesta durante uma hora?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s).

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

2.2.4. **Sem usar a calculadora**, determine o valor de  $x$  que maximiza a duração da sesta do Ludovino.

3. Considere a função  $g$ , de domínio  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , definida por  $g(x) = \text{tg}^2 x$ .

**Sem usar a calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa  $\frac{\pi}{4}$ .

3.2. Prove que a equação  $g(x) = 2$  tem pelo menos uma solução em  $\left] 0, \frac{\pi}{3} \right[$ .

FIM

## Formulário

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

## COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> <b>(60 pontos)</b>	Cada resposta certa: + 10	Cada resposta errada: – 2	Cada questão não respondida ou anulada: 0
--------------------------------------	---------------------------	---------------------------	---

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

<b>Grupo II</b> <b>(140 pontos)</b>	<b>1</b> ..... <b>40</b>	<b>2</b> ..... <b>71</b>	<b>3</b> ..... <b>29</b>
	<b>1.1</b> ..... <b>15</b>	<b>2.1</b> ..... <b>13</b>	<b>3.1</b> ..... <b>15</b>
	<b>1.2</b> ..... <b>10</b>	<b>2.2.1</b> ..... <b>13</b>	<b>3.2</b> ..... <b>14</b>
	<b>1.3</b> ..... <b>15</b>	<b>2.2.2</b> ..... <b>15</b>	
	<b>2.2.3</b> ..... <b>15</b>		
	<b>2.2.4</b> ..... <b>15</b>		