Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2003/2004)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2

Duração: 90 minutos **Classificação:** ___ , ___

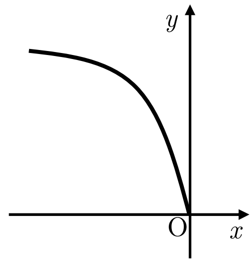
3.º Período – 03/05/04

Nome:____ **N.º:**____ **O professor:**

Grupo I

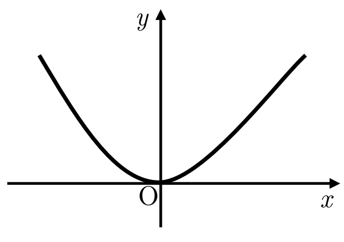
- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura seguinte está desenhada parte do gráfico de uma função g, **ímpar**, de domínio $\mathbb{R}$.

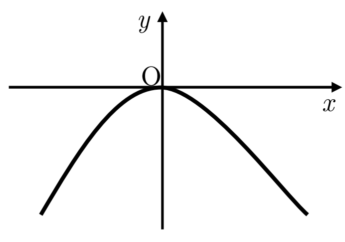


Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico de g'', **segunda derivada** de g ?

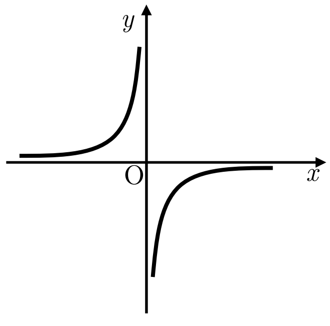
(A)



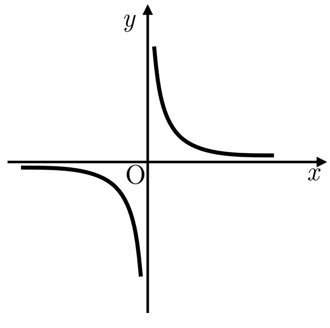
(B)



(C)

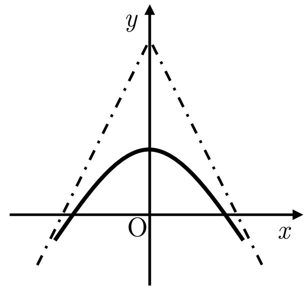


(D)



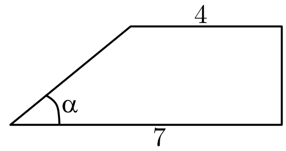
2. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}$. As rectas de equações $y = 2x + 4$ e $y = -2x + 4$ são assimptotas do gráfico de f.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?



(A) $+\infty$ **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** $-\infty$

3. Na figura está representado um trapézio rectângulo, cujas bases têm 7 e 4 unidades de comprimento.
Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio, em função de α ?

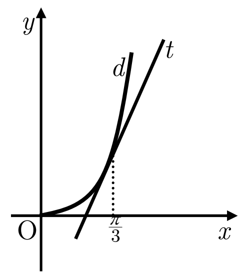


(A) $11 \, sen \, \alpha$ **(B)** $16{,}5 \cos \alpha$ **(C)** $11 \, tg \, \alpha$ **(D)** $16{,}5 \, tg \, \alpha$

4. É dada a função definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{sen \, x}{x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) + \lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

5. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função definida por $d(x) = 0,5 \, tg \, x$ e a recta t, tangente ao gráfico de d no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$. Qual é o declive da recta t ?



(A) $0{,}5$ **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $3{,}5$

6. No desenvolvimento de $(x+y)^8$, uma das parcelas é igual a $k \, x^5 y^3$.

Qual é o valor de k ?

(A) 56 **(B)** 28 **(C)** 16 **(D)** 8

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. A senhora Lomelina foi comprar legumes e, às onze horas, pô-los no frigorífico (onde, nesse momento, a temperatura era de $6°$ Celsius).

Logo que os legumes foram introduzidos no frigorífico, a temperatura **começou de imediato a aumentar**, tendo atingido um valor máximo e voltado depois a diminuir, aproximando-se da temperatura inicial.

Admita que a temperatura no interior do frigorífico, medido em graus Celsius, após t **minutos**, pode ser dada por $f(t) = 6 + t\,e^{-0{,}03t} \quad (t \geq 0)$ (O instante $t = 0$ corresponde às **onze horas**)

Nas três primeiras alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.1. Qual era a temperatura no interior do frigorífico às onze horas e doze minutos?
Apresente o resultado, em graus Celsius, arredondado às décimas.

1.2. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:
A que horas começou a temperatura no interior do frigorífico a diminuir ?
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

1.3. Como foi referido no enunciado, depois de o interior do frigorífico atingir a temperatura máxima, esta tendeu a baixar até aproximar-se da temperatura inicial.
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, indique a partir de que horas a velocidade de decrescimento foi menor.
Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

1.4. O frigorífico da senhora Lomelina tem seis prateleiras. Para uma melhor organização dos alimentos, ela tem de colocá-los de uma certa maneira: legumes , lacticínios, carne e peixe, cada grupo numa prateleira diferente.
Sendo a colocação dos quatro grupos de alimentos nas seis prateleiras feitas ao acaso, qual é a probabilidade de os legumes ficarem na prateleira de baixo, não ficando nada na prateleira do topo?

2. Considere a função g definida por $g(x) = x + sen(2x)$.
Usando processos exclusivamente analíticos, resolva as quatro alíneas seguintes.

2.1 Determine, se existir, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

2.2. Mostre que $g''(x) = -4sen(2x)$ e estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico em $]0,\pi[$.

2.3. **Prove** que a equação $g(x) = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Usando a calculadora gráfica, **determine** a única solução, apresentando o resultado aproximado às centésimas e o(s) gráfico(s) utilizado(s).

2.4. Dada a função definida por $h(x) = g(x) - x$, determine o valor exacto de $h\left(\frac{11\pi}{24}\right)$.

3. Chama-se **co-tangente de um ângulo** α (e escreve-se $cotg\ \alpha$) à razão $\frac{1}{tg\,\alpha}$.

Dada uma função real u, prove que $\left(cotg\ u\right)' = -\frac{u'}{sen^2 u}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **6**

Cada resposta certa: + 1	Cada resposta errada: – 0,2	Cada questão não respondida ou anulada: 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Grupo II **14**

1...............................6,0	**2.**..............................6,5	**3.**..............................1,5
1.1...................1,2	**2.1.**..................1,5	
1.2...................1,8	**2.2.**..................1,8	
1.3...................1,6	**2.3.**..................1,6	
1.4...................1,4	**2.4.**..................1,6	

O professor: RobertOliveira Net: sm.page.vu ou roliveira.pt.to

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$