Escola Secundária de Francisco Franco (2012/2013)

www.esffranco.edu.pt

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 13

3.º Período | 26/04/13 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num saco encontram-se 13 bolas indistinguíveis ao tato: 5 são vermelhas, algumas são azuis e outras são verdes.

Seja n o número de bolas verdes no saco e admita que se extraem duas bolas, uma após outra, com reposição.

Qual é a probabilidade de nenhuma das bolas ser azul?

(A) $\frac{25n^2}{169}$ **(B)** $\frac{n^2+25}{169}$ **(C)** $\frac{(n+5)^2}{169}$ **(D)** $\frac{{}^{n}C_5}{{}^{13}C_2}$

2. *"Aproximamo-nos do fim da vida – não, não da vida em si, mas de uma outra coisa: o fim de qualquer probabilidade de mudança nessa vida."*

O SENTIDO DO FIM, Julian Barnes

O Urbino considera que é um trabalhador altamente qualificado pelo que pensa que a probabilidade de ser promovido é igual a $0{,}7$

No entanto, ele tem noção que a probabilidade de não ser promovido e mudar de emprego é igual a $0{,}2$

Qual é a probabilidade de o Urbino mudar de emprego se não for promovido?

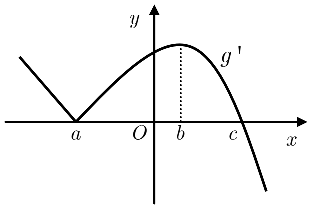
(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + e^{-x} + \ln x + \sqrt{2x^2+5}}{x}$

O gráfico de f tem uma assíntota horizontal. Indique a sua equação.

(A) $y = \frac{3}{2}$ **(B)** $y = 1{,}4$ **(C)** $y = \sqrt{5}$ **(D)** $y = \sqrt{2}$

4. Na figura ao lado está parte do gráfico da primeira derivada de uma função g, ambas de domínio $\mathbb{R}$



Tal como a figura sugere, a, b e c são números reais tais que $a < b < c$

Qual é a proposição falsa?

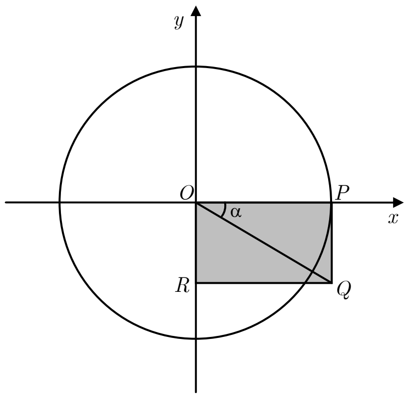
(A) $g(a)$ é um mínimo relativo de g

(B) $g(b)$ não é um extremo relativo de g

(C) $g(c)$ é um máximo relativo de g

(D) Existe $g'(a)$

5. Na figura está representado, no círculo trigonométrico, o retângulo $[OPQR]$



Sabe-se que:

- $[OP]$ é um raio do círculo;
- $[OP]$ e $[RQ]$ são paralelos ao eixo Ox
- α é a amplitude do ângulo POQ
- $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

Qual é a expressão que dá o perímetro do retângulo $[OPQR]$ em função de α ?

(A) $2(1 + \operatorname{tg} \alpha)$

(B) $2(1 - \operatorname{tg} \alpha)$

(C) $2(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$

(D) $2(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+3)}{x^2-9} + k & \text{se} \quad x < -3 \\[2ex] e^{2x}\sqrt{3x+9} & \text{se} \quad x \geq -3 \end{cases}$$

Usando métodos exclusivamente analíticos, resolva os itens seguintes.

1.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0

1.2. Sabe-se que a função f é contínua no seu domínio.
Nestas condições, determine o valor de k

2. De uma certa função g sabe-se que:

- o seu domínio é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
- a sua derivada tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e é dada por $g'(x) = x + 2\ln\left(x^2 - 4x + 4\right)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e indique, se existirem, as abcissas dos pontos de inflexão.

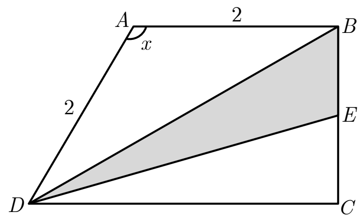
3. Seja f a função definida em $]0,2\pi[\setminus \{\pi\}$ por $f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\operatorname{sen} x}$

3.1. Mostre que $\forall x \in \left]0, \pi\right[\setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}, \ f(2x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

3.2. Sem usar a calculadora, determine a abcissa do ponto de interseção entre o gráfico de f e a reta de equação $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Sugestão: use a alínea anterior.

4. Na figura está representado o trapézio $[ABCD]$



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$
- $\overline{BC} = 2\,\overline{BE}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
- $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

4.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por
$h(x) = \operatorname{sen} x(1 - \cos x)$

4.2. Sem usar a calculadora, determine a área da região sombreada para $x = \dfrac{3\pi}{4}$

4.3. Considere os pontos do gráfico de h de abcissas a e b e tais que:

- $h(a) = \dfrac{1}{2}$
- $h'(b) = 0$

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a distância entre esses dois pontos (arredondada às décimas).

Apresente na sua resposta:

- um referencial e o gráfico da função h
- as coordenadas de pontos relevantes arredondadas às centésimas;
- o valor pedido.

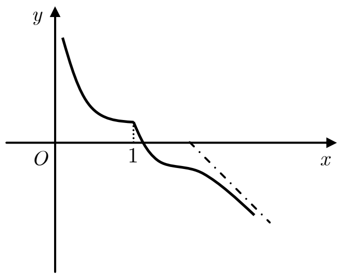
Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$
Sabe-se que:

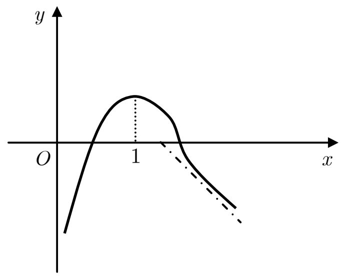
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$
- f admite derivada, finita ou infinita, em $\mathbb{R}^+$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]0,1[$

Apenas uma das opções seguintes pode representar parte do gráfico da função f

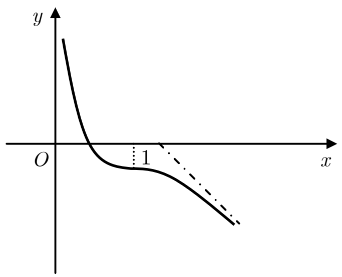
I)



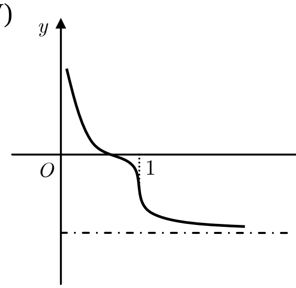
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:
- indique a opção que pode representar f
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	1.......................34	2.......................19	3.......................34	4.......................44	5.......................19
	1.1...........19 1.2...........15		3.1...........15 3.2...........19	4.1...........15 4.2...........10 4.3...........19	

Formulário

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$

$\text{tg}(a+b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

O professor: RobertOliveira
http://roliveira.pt.to