Escola Secundária de Francisco Franco

Resumo do 5.º teste

12.º 5, 6 e 7

1. De cada vez que o Romualdo lança um dardo a um alvo, a probabilidade de acertar no seu centro é igual a um número p
Ao lançar esse dardo três vezes, qual é a probabilidade de ele não acertar nenhuma vez no centro do alvo?

(A) $1 + 6p^2 - p^3$ **(B)** $1 - 6p^2 + p^3$

(C) $1 - 3p + 3p^2 - p^3$ **(D)** $1 + 3p - 3p^2 + p^3$

2. Uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, é tal que a sua **segunda derivada** está definida por

$f''(x) =$

Em relação ao gráfico da função f, indique a afirmação **falsa**.

(A) A concavidade está voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$

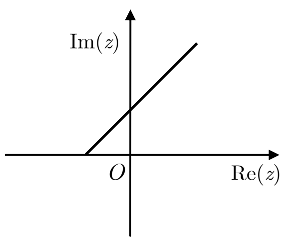
(B) A concavidade está voltada para cima no intervalo $]-\infty, -1]$

(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[-1, 1]$

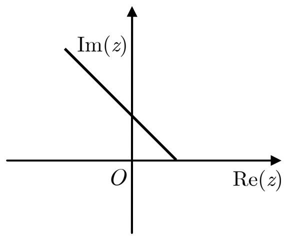
(D) Existem dois pontos de inflexão

3. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos pela condição ?

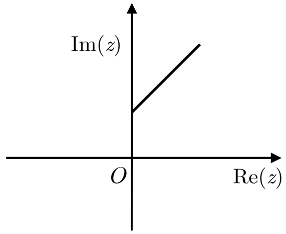
(A)



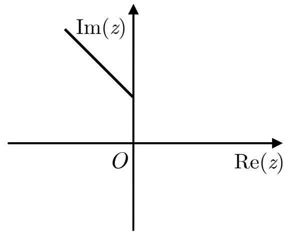
(B)



(C)



(D)



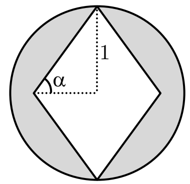
4. *"Pouco habituado como estava a cenas de homicídio, Patrik moveu-se cuidadosamente num círculo amplo em torno do cadáver."*

A PRINCESA DE GELO, Camilla Läckberg

Na figura está representado um círculo de raio 1 e um losango parcialmente nele inscrito, cuja diagonal maior coincide com o diâmetro do círculo.

Seja A a função que dá a área da zona a sombreado em função do ângulo α da figura.

Qual das expressões seguintes pode ser a de A ?



(A) **(B)**

(C) **(D)**

5. Para um certo valor positivo de k, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) =$$

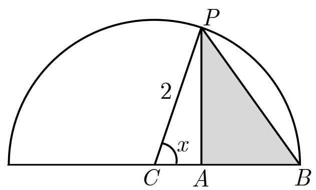
Qual é o valor de k ?

(A) 5 **(B)** -1 **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $-\frac{2}{5}$

1. Na semi-circunferência de raio 2 da figura está representado, a sombreado, um triângulo $[ABP]$

Considere que o ponto P percorre a semi-circunferência e, para cada posição desse ponto:

- seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PCB $(x \in]0, \pi[)$



- seja f a área do triângulo $[ABP]$ em função de x

Resolva as alíneas **1.1.** e **1.2.** sem recorrer à calculadora.

1.1. Mostre que $f(x) =$

1.2. Mostre que $f\,'(x) =$ e determine o valor de x que maximiza a área do triângulo $[ABP]$

1.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o menor valor de x para o qual a área do triângulo $[ABP]$ é ***um quarto*** *da área do semicírculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s).
Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w =$

Sem usar a calculadora:

2.1. Calcule $\frac{i \times w^6}{1-i}$ apresentando o resultado final na forma algébrica.

2.2. Determine as raízes cúbicas de w, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem.

Tendo em conta a figura, sabe-se que:

- O ponto A pertence a essa circunferência e é a imagem geométrica de um complexo w_1
- Um argumento de w_1 é $\frac{7\pi}{12}$
- O ponto B pertence a essa circunferência e é a imagem geométrica de um complexo w_2
- α é a amplitude do ângulo POB

Sem recorrer à calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes.

3.1. Mostre que $\frac{w_1}{w_2} = \operatorname{cis}\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right)$ e determine um valor para α de modo que $\frac{w_1}{w_2}$ seja um número imaginário puro.

3.2. Nesta alínea, admita que o raio da circunferência é 3 e que w_3 é um complexo cuja imagem geométrica está na circunferência e na parte negativa do eixo imaginário.

Determine $\left(-w_1\right) \times w_3$ na forma trigonométrica.

3.3. Considere agora que:

- o número complexo $w_4 = 2 - 3\,i^{123}$ tem imagem na circunferência da figura;
- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$

Calcule $\overline{w_2}$ na forma trigonométrica.

1. Inscreveram-se todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal num dado cúbico equilibrado (um elemento por cada face).
Ao lançar esse dado duas vezes, qual é a probabilidade de saírem dois números pares?

(A) **(B)** **(C)** **(D)**

2. Uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, é tal que a sua **segunda derivada** está definida por $f\,''(x) =$

Em relação ao gráfico da função f, indique a afirmação verdadeira.

(A) Existem dois pontos de inflexão

(B) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $]0, 2[$

(C) A concavidade está voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$

(D) A concavidade está voltada para cima no intervalo $]0, +\infty[$

3. Na figura ao lado estão representados o gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, e as suas assimptotas.

Quanto ao valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x - g(x)}{x}$:

(A) Não existe

(B) Ele pode ser igual a $-\infty$

(C) Ele pode ser igual a -1

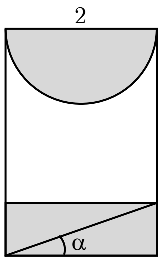
(D) Ele pode ser igual a 0

4. *"Acenou com a cabeça na direcção de Patrik, que estava ligeiramente afastado do semicírculo formado por Erica, Henrik e Birgit, em frente à secretária de Mellberg."*

A PRINCESA DE GELO, Camilla Läckberg

Dada a figura ao lado, admita que as áreas a sombreado do semicírculo e do quadrado são iguais.
Assim, pode-se concluir que:

(A)
(B)
(C)
(D)



5. Dado o domínio plano representado no plano complexo ao lado, qual das condições seguintes pode definir em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada?

(A) $\left|z\right| < 1 \wedge \left|z\right| > 2 \wedge -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

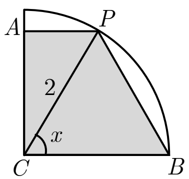
(B) $\left|z\right| < 1 \wedge \left|z\right| > 2 \wedge -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

(C) $1 < \left|z\right| < 2 \wedge -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

(D) $1 < \left|z\right| < 2 \wedge -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

1. No quarto de circunferência de raio 2 da figura está representado, a sombreado, um trapézio $[ACBP]$

Considere que o ponto P percorre esse quarto de circunferência e, para cada posição desse ponto:



- seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PCB $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$
- seja f a área do trapézio $[ACBP]$ em função de x

Resolva as alíneas **1.1.** e **1.2.** sem recorrer à calculadora.

1.1. Mostre que $f(x) =$

1.2. Mostre que $f'(x) =$ e determine o valor de x que maximiza a do trapézio $[ACBP]$

1.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

*Qual é o menor valor de x para o qual a área do trapézio $[ACBP]$ é **metade** da área do quarto de círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s).
Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w =$
Sem usar a calculadora:

2.1. Mostre que a imagem geométrica de $\frac{i \times w^6}{1+i}$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2.2. Determine as raízes cúbicas de w, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado, no plano complexo, um pentágono regular centrado na origem.
Sabe-se que:

- Os pontos A e B pertencem a esse pentágono e são as imagens geométricas de duas das raízes de índice n de um certo número complexo w
- O ponto A tem coordenadas $(0,2)$ e é a imagem geométrica de um complexo w_1
- O ponto B é a imagem geométrica de um complexo w_2

Sem recorrer à calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes.

3.1. Determine na forma trigonométrica:

3.1.1. $\dfrac{w_1}{-z}$, sendo $z = \sqrt{2}\,\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{7}$

3.1.2. $\overline{w_2}$

3.2. Escreva w na forma algébrica.

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w =$ tal que α é um seu argumento.

Mostre que $w\,i = -3(\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha)$