Escola Secundária de Francisco Franco (2009/2010)

1.º TESTE DE MATEMÁTICA A

www.esffranco.edu.pt

12.º 1 (recorrente)

Módulo 9 – Trigonometria e Números Complexos

06/05/10 **Duração: 90 minutos**

Nome: ______________________ **N.º:** ____ **Classificação:** ______

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

Considere ainda as seguintes afirmações:

(i) A função f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Assim, é possível concluir que:

(A) A afirmação (i) é verdadeira e a (ii) é falsa.

(B) A afirmação (i) é falsa e a (ii) é verdadeira.

(C) Ambas as afirmações são verdadeiras.

(D) Ambas as afirmações são falsas.

2. É dada a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, definida por $g(x) = \operatorname{sen}\left(8x^2\right)$

O gráfico de g contém alguns pontos onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox.
Qual é o conjunto das abcissas desses pontos?

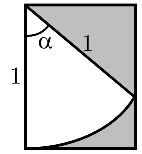
(A) $\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{3\pi}}{4}\right\}$ **(B)** $\left\{0, \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{3\pi}}{4}\right\}$

(C) $\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right\}$ **(D)** $\left\{0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right\}$

3. *"Tratava-se de uma gravura em aço, representando um edifício oval, com janelas rectangulares e uma pequena torre na fachada."*

1984, George Orwell

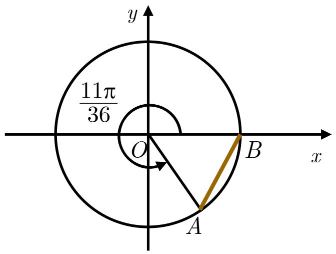
Na figura junta, temos um sector circular de amplitude α e raio 1 inscrito num rectângulo em que um dos lados vale também 1.
Qual das expressões seguintes dá a área da parte sombreada em função de α?



(A) $\operatorname{sen}\alpha - \frac{\alpha}{2}$ **(B)** $\operatorname{sen}\alpha - 2\alpha$

(C) $\cos\alpha - \frac{\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - 2\alpha$

4. No círculo trigonométrico da figura, está representado o ângulo de amplitude $\frac{11\pi}{36}$, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade o segmento de recta $[OA]$).



Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $\overline{AB}$?

(A) $0{,}68$ **(B)** $0{,}76$ **(C)** $0{,}84$ **(D)** $0{,}92$

5. Seja h a função definida por $h(x) = 2 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Qual é a expressão geral das equações das assimptotas verticais do gráfico de h?

(A) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ **(B)** $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

(C) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ **(D)** $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 4 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

1.1. **Sem usar a calculadora**, resolva os três itens seguintes:

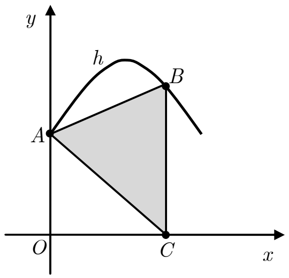
1.1.1. Determine o contradomínio de h.

1.1.2. Mostre que 4π é o período de h.

1.1.3. Seja α um número tal que $\pi < \alpha < 2\pi \wedge \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}$.
Determine $h(\alpha)$.

1.2. Na figura ao lado encontra-se parte do gráfico da função h no domínio $[0, 2\pi]$ e um triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de h que pertence ao eixo Oy;
- B é um ponto do gráfico de h de ordenada 6;
- C é um ponto do eixo Ox de abcissa igual à do ponto B.



Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize aproximações às décimas.

2. De uma função g, de domínio $[0, \pi]$, sabe-se que o seu gráfico passa no ponto $A(0, \pi)$ e que a sua **primeira derivada** está definida, igualmente no intervalo $[0, \pi]$, por $g'(x) = \sqrt{2}\,x - \cos(2x)$. **Usando exclusivamente métodos analíticos**:

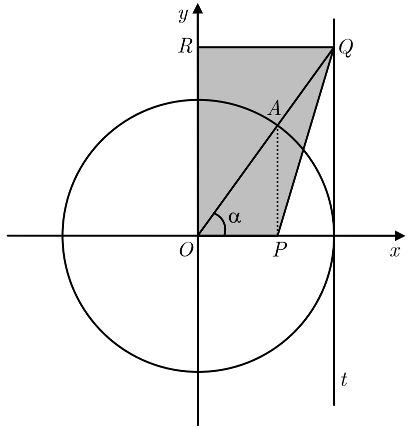
2.1. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto A.

2.2. Estude a função g quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

3. Na figura está representado, no círculo trigonométrico, o trapézio $[OPQR]$.

Tal como é sugerido pela figura:

- t é a recta tangente ao círculo e é perpendicular ao eixo Ox;
- P pertence ao eixo Ox;
- Q pertence à recta t;
- R pertence ao eixo Oy;
- A é o ponto de intersecção entre a recta OQ e a circunferência.



Considere que o ponto Q se desloca sobre a recta t mas apenas no primeiro quadrante.

Os pontos A, P e R acompanham o movimento do ponto Q de tal forma que a recta AP é sempre paralela à recta t e a ordenada de R é igual à de Q.

Para cada posição do ponto Q, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo POA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ e seja f a área do trapézio $[OPQR]$ em função de α.

3.1. Mostre que $f(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{tg}(\alpha)}{2}$

3.2. Determine a área do trapézio $[OPQR]$ quando as duas coordenadas do ponto Q são iguais.

3.3. Calcule, **analiticamente**, $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	**1.** .... **63** **1.1.1.** .... 15 **1.1.2.** .... 15 **1.1.3.** 18 **1.2.** 15	**2.** .... **33** **2.1.** 15 **2.2.** 18	**3.** .... **54** **3.1.** .... 18 **3.2.** 18 **3.3.** 18