Escola Secundária de Francisco Franco (2009/2010)

www.esffranco.edu.pt

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º ano (alternativo)

06/05/10 **Duração: 90 minutos**

Nome: ______________________ **N.º:** ____ **Classificação:**

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Três raparigas e três rapazes sentam-se em seis cadeiras dispostas lado a lado num cinema.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que as raparigas ficam todas juntas?

(A) 144 **(B)** 72 **(C)** 36 **(D)** 18

2. *"Castanhos, provavelmente, mas por vezes as pessoas de cabelo escuro têm olhos azuis."*
1984, George Orwell

Sobre uma população de uma cidade, sabe-se que:

- 80% dos habitantes têm o cabelo castanho;
- 30% dos habitantes têm olhos azuis;
- todos os habitantes têm o cabelo castanho ou olhos azuis.

Ao escolher um habitante ao acaso dessa cidade, qual é a probabilidade de ele ter olhos azuis sabendo que tem o cabelo castanho?

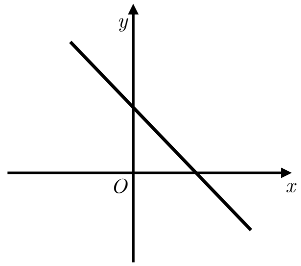
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{9}$

3. De uma função g de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

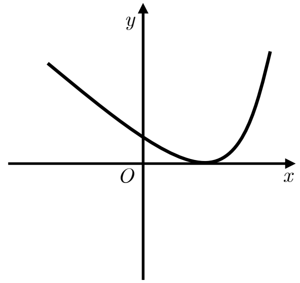
- g é crescente em $]-\infty, 2]$;
- g tem um extremo para $x = 2$.

Qual dos seguintes **não pode** representar o gráfico da função g', **primeira derivada** de g?

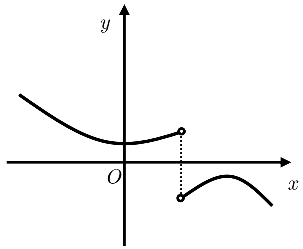
(A)



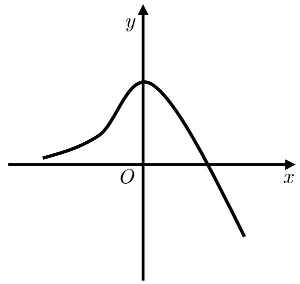
(B)



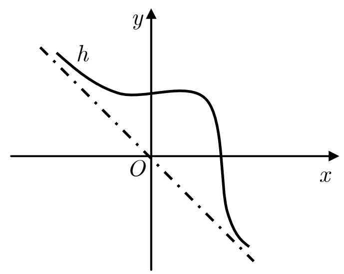
(C)



(D)



4. Sobre o gráfico de uma função h de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes pares é a única assimptota (tal como se pode ver na figura).



Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{h(x)+x-3}$.

(A) 1 **(B)** 0

(C) $+\infty$ **(D)** $-\infty$

5. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

Considere ainda as seguintes afirmações:

(i) A função f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Assim, é possível concluir que:

(A) A afirmação (i) é verdadeira e a (ii) é falsa.

(B) A afirmação (i) é falsa e a (ii) é verdadeira.

(C) Ambas as afirmações são verdadeiras.

(D) Ambas as afirmações são falsas.

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Sejam as funções f e g, ambas de domínio $]-3, +\infty[$, definidas por

$f(x) = \ln(x+3)$ e por $g(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{8}$

Resolva os dois itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**.

1.1. Usando a **definição de derivada num ponto**, calcule $f\,'(0)$

1.2. Verifique que $g\,''(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{(x+3)^2}$ e estude g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 4 + 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2.1. **Sem usar a calculadora**, resolva os três itens seguintes:

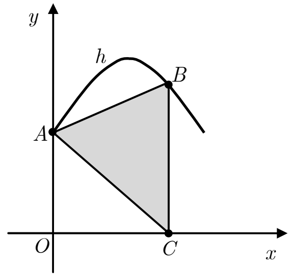
2.1.1. Determine o contradomínio de h.

2.1.2. Mostre que 4π é o período de h.

2.1.3. Seja α um número tal que $\pi < \alpha < 2\pi \wedge \cos\left(\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$. Determine $h(\alpha)$.

2.2. Na figura ao lado encontra-se parte do gráfico da função h no domínio $[0, 2\pi]$ e um triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de h que pertence ao eixo Oy;
- B é um ponto do gráfico de h de ordenada 6;
- C é um ponto do eixo Ox de abcissa igual à do ponto B.



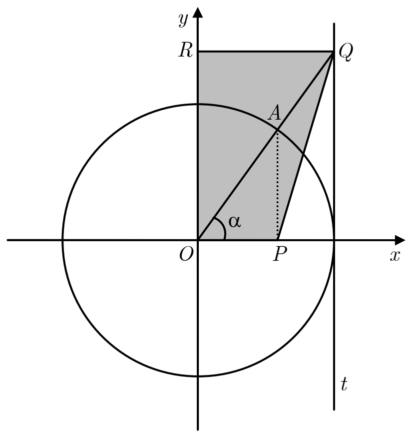
Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize aproximações às décimas.

3. Na figura está representado, no círculo trigonométrico, o trapézio $[OPQR]$.

Tal como é sugerido pela figura:

- t é a recta tangente ao círculo e é perpendicular ao eixo Ox;
- P pertence ao eixo Ox;
- Q pertence à recta t;
- R pertence ao eixo Oy;
- A é o ponto de intersecção entre a recta OQ e a circunferência.



Considere que o ponto Q se desloca sobre a recta t mas apenas no primeiro quadrante.

Os pontos A, P e R acompanham o movimento do ponto Q de tal forma que a recta AP é sempre paralela à recta t e a ordenada de R é igual à de Q.

Para cada posição do ponto Q , seja α a amplitude, em radianos, do ângulo POA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ e seja f a área do trapézio $[OPQR]$ em função de α .

3.1. Mostre que $f(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)+\text{tg}(\alpha)}{2}$

3.2. Determine a área do trapézio $[OPQR]$ quando as duas coordenadas do ponto Q são iguais.

3.3. Calcule, **analiticamente**, $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	**1.**..**36** **1.1.**............................18 **1.2.**............................18	**2.**..**60** **2.1.1.**.........................14 **2.1.2.**.........................14 **2.1.3.**.........................18 **2.2.**............................14	**3.**..**54** **3.1.**............................18 **3.2.**............................18 **3.3.**............................18