



www.esaas.com

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

3.º Período

08/05/07

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

--	--	--	--

O professor: _____

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Os quatro apresentadores do programa humorístico «*Diz que é uma espécie de magazine*» vão iniciar mais um programa, sentando-se, ao acaso, lado a lado. Qual é a probabilidade de o elemento mais alto dos apresentadores ficar num dos extremos?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{3}$

2. Um dado **viciado**, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado algumas vezes. Sabe-se que a probabilidade de sair um número par é igual a 80%.

Seja X a variável aleatória que designa o «número de vezes que, nesses lançamentos, sai face par». A distribuição de probabilidades da variável X é

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,008	a	b	0,512

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = 0,282$ e $b = 0,198$

(B) $a = 0,198$ e $b = 0,282$

(C) $a = 0,384$ e $b = 0,096$

(D) $a = 0,096$ e $b = 0,384$

3. Considere uma certa função f de domínio \mathbb{R} . Sabe-se que $y = x + 3$ é a equação de uma recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

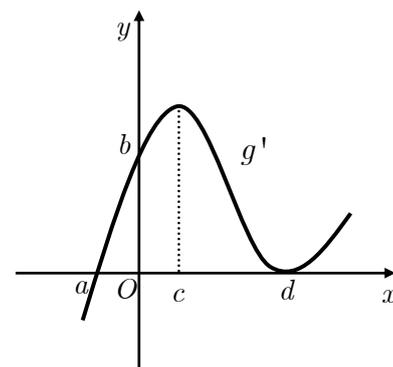
(A) $f(2) = 3$

(B) $f'(2) = 3$

(C) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

(D) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f(2)$

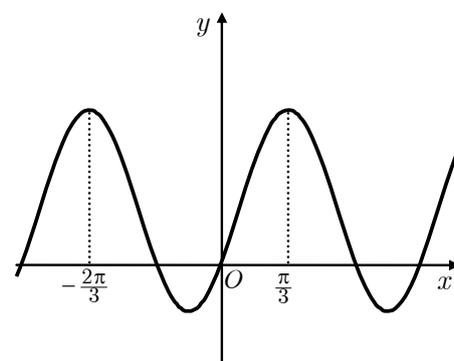
4. Na figura ao lado está parte do gráfico da função g' , primeira derivada de g , de domínio \mathbb{R} . Tal como a figura sugere, a e d são zeros de g' , $g'(0) = b$ e c e d são extremantes de g' .



- (A) a e b (B) c e d
 (C) a e d (D) b e c

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h , periódica e derivável.

Qual das afirmações seguintes é falsa?



- (A) $h(x + \pi) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 (B) $h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 (C) $h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$
 (D) $h''\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0$

6. Dado $x \in \mathbb{R}$, a que é igual $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$?

- (A) $\frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}\sin x + \cos x}{2}$ (C) $\frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{2}$ (D) $\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2}$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. De uma certa função f , de domínio $]-2, +\infty[$, sabe-se que a que sua **derivada**, está definida por

$$f'(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+2}.$$

- 1.1. Sabendo que $e - 2$ é um zero de f , escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $e - 2$.
 1.2. Sem recorrer à calculadora, estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

2. “Apontou para um balcão, premiu um botão e ergueu-se do tampo um minúsculo frigorífico circular!”

AMY E OS GANSOS BRAVOS, Patricia Hermes

Os economistas de uma empresa de venda de pequenos frigoríficos concluíram que o número de unidades vendidas num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público (situado entre os 100 e os 300 euros), de acordo com a função $V(x) = 6e^{4-0,01x}$, sendo x o preço de venda ao público, em euros, de um frigorífico e $V(x)$ o número aproximado de frigoríficos vendidos num mês, $100 \leq x \leq 300$.

- 2.1.** A empresa tem um conjunto de despesas (compra de matéria-prima, ordenados dos trabalhadores, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda dos frigoríficos. Sabendo que cada frigorífico vendido acarreta à empresa uma despesa total de 110 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda dos frigoríficos, é dado por

$$L(x) = (6x - 660)e^{4-0,01x}$$

- 2.2.** **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos) mostre que há um preço de venda de tal modo que a empresa lucra 2000 euros.
- 2.3.** Usando processos exclusivamente analíticos, determine o preço que otimiza os lucros da empresa.

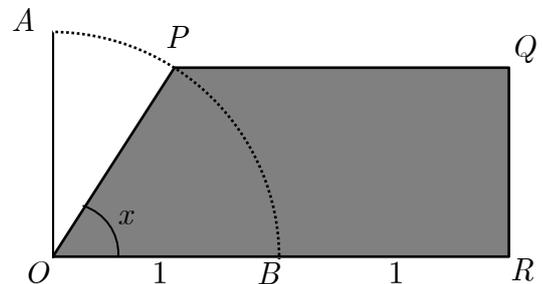
3. “Olhavam para a escuridão, contemplando o quadrilátero de luz que a cozinha iluminada projectava na noite (...)”

AS VINHAS DA IRA, John Steinbeck

Na figura está representado a sombreado o quadrilátero $[OPQR]$.

Tem-se que:

- $\overline{OB} = \overline{BR} = 1$
- AB é um arco de circunferência de centro em O
- o ponto P move-se ao longo desse arco de tal forma que se tem sempre $PQ \parallel OR$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo POB , $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$



- 3.1.** Mostre que a área do quadrilátero $[OPQR]$ é dada, em função de x , por

$$g(x) = \text{sen } x \left(2 - \frac{\cos x}{2} \right)$$

- 3.2.** Suponha que $\text{sen } x = \frac{1}{5}$. **Sem recorrer à calculadora**, determine $g(x)$.

- 3.3.** Calcule $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

- 3.4.** Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de x para o qual a área do quadrilátero $[OPQR]$ é igual à área do quarto de círculo $[AOB]$?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

4. A função h está definida por $h(x) = \operatorname{tg}(kx)$, $k \neq 0$
 Prove, aplicando a **definição de derivada**, que $h'(0) = k$

FIM

Formulário

Trigonometria	Regras de derivação	Limites notáveis
$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$ $\operatorname{cos}(a + b) = \operatorname{cos} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$ $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$	$(u + v)' = u' + v'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$ $(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \operatorname{cos} u$ $(\operatorname{cos} u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u}$ $(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
<p>Áreas de figuras planas</p> <p>Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$</p> <p>Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$</p> <p>Políg. regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$</p> <p>Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$</p> <p>(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)</p>		

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9		Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0	
Grupo II (146 pontos)	1.....32 1.1.....15 1.2.....17	2.....47 2.1.....15 2.2.....15 2.3.....17	3.....52 3.1.....13 3.2.....13 3.3.....13 3.4.....13	4.....15