

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6/7

Nome:

N.º:

Classificação:

 ,

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. De cada vez que o Romualdo lança um dardo a um alvo, a probabilidade de acertar no seu centro é igual a um número p . Ao lançar esse dardo três vezes, qual é a probabilidade de ele não acertar nenhuma vez no centro do alvo?



- (A) $1 + 6p^2 - p^3$ (B) $1 - 6p^2 + p^3$
 (C) $1 - 3p + 3p^2 - p^3$ (D) $1 + 3p - 3p^2 + p^3$

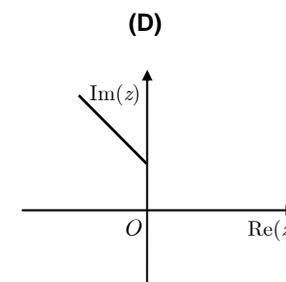
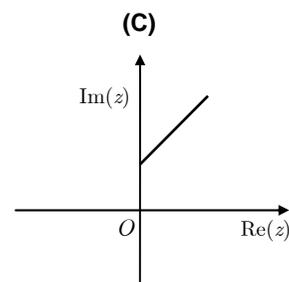
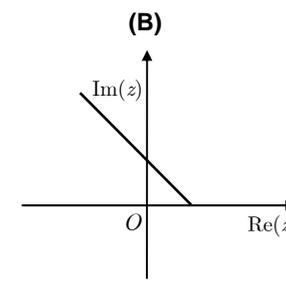
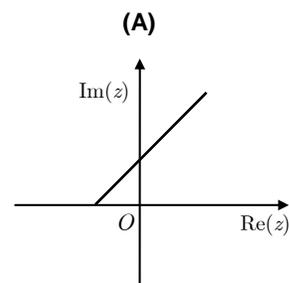
2. Uma função f , de domínio \mathbb{R} , é tal que a sua **segunda derivada** está definida por

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 4$$

Em relação ao gráfico da função f , indique a afirmação **falsa**.

- (A) A concavidade está voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$
 (B) A concavidade está voltada para cima no intervalo $] -\infty, -1]$
 (C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[-1, 1]$
 (D) Existem dois pontos de inflexão

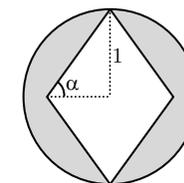
3. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos pela condição $|z-4i| = |z-2-2i| \wedge \text{Im}(z) \geq 0$?



4. “Pouco habituado como estava a cenas de homicídio, Patrik moveu-se cuidadosamente num círculo amplo em torno do cadáver.”

A PRINCESA DE GELO, Camilla Läckberg

Na figura está representado um círculo de raio 1 e um losango parcialmente nele inscrito, cuja diagonal maior coincide com o diâmetro do círculo.



Seja A a função que dá a área da zona a sombreado em função do ângulo α da figura.

Qual das expressões seguintes pode ser a de A ?

- (A) $\pi - \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$ (B) $\pi - \text{sen}(2\alpha)$
 (C) $\pi - \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ (D) $\pi - \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

5. Para um certo valor positivo de k , é **contínua** em \mathbb{R} a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x)}{x^2 - 2x} & \text{se } x < 0 \\ \log_5(x + k) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 5 (B) -1 (C) $\frac{1}{5}$ (D) $-\frac{2}{5}$

Grupo II

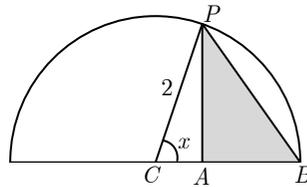
Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na semi-circunferência de raio 2 da figura está representado, a sombreado, um triângulo $[ABP]$

Considere que o ponto P percorre a semi-circunferência e, para cada posição desse ponto:

- seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PCB ($x \in]0, \pi[$)
- seja f a área do triângulo $[ABP]$ em função de x



Resolva as alíneas 1.1. e 1.2. sem recorrer à calculadora.

- 1.1. Mostre que $f(x) = 2\text{sen}x(1 - \cos x)$
- 1.2. Mostre que $f'(x) = 2 + 2\cos x - 4\cos^2 x$ e determine o valor de x que maximiza a área do triângulo $[ABP]$

1.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o menor valor de x para o qual a área do triângulo $[ABP]$ é **um quarto** da área do semicírculo?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s).

Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $w = -\sqrt{3} - i$

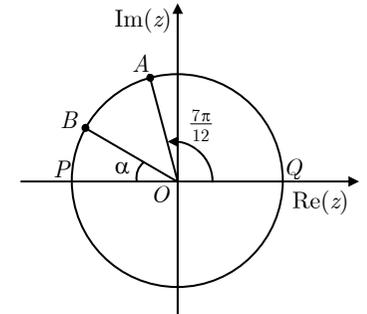
Sem usar a calculadora:

- 2.1. Calcule $\frac{i \times w^6}{1-i}$ apresentando o resultado final na forma algébrica.
- 2.2. Determine as raízes cúbicas de w , simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem.

Tendo em conta a figura, sabe-se que:

- O ponto A pertence a essa circunferência e é a imagem geométrica de um complexo w_1
- Um argumento de w_1 é $\frac{7\pi}{12}$
- O ponto B pertence a essa circunferência e é a imagem geométrica de um complexo w_2
- α é a amplitude do ângulo POB



Sem recorrer à calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes.

3.1. Mostre que $\frac{w_1}{w_2} = \text{cis}\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right)$ e determine um valor para α de modo que

$\frac{w_1}{w_2}$ seja um número imaginário puro.

3.2. Nesta alínea, admita que o raio da circunferência é 3 e que w_3 é um complexo cuja imagem geométrica está na circunferência e na parte negativa do eixo imaginário.

Determine $(-w_1) \times w_3$ na forma trigonométrica.

3.3. Considere agora que:

- o número complexo $w_4 = 2 - 3i^{123}$ tem imagem na circunferência da figura;
- $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$

Calcule $\overline{w_2}$ na forma trigonométrica.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....55	2.....40	3.....55
	1.1.....20	2.1.....20	3.1.....20
	1.2.....20	2.2.....20	3.2.....15
	1.3.....15		3.3.....20