Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2007/2008)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 5

www.esaas.com

3.º Período   22/04/08   Duração: 90 minutos

Nome: ____________ N.º: ____ Classificação: ____ , ____

O professor:

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Numa certa experiência aleatória, há apenas quatro acontecimentos elementares, sendo todos equiprováveis.
Sabe-se que:

- a variável discreta associada a esta experiência toma os valores a, b, c, e d;
- o valor médio da variável é igual a 5.

Qual é a expressão que dá o desvio padrão dessa variável?

(A) $\dfrac{\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2}}{4}$ **(B)** $\dfrac{\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2}}{2}$

(C) $\dfrac{(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2}{4}$ **(D)** $\dfrac{(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2}{2}$

2. *"(…) aventurara-se ao estatuto de primeiro importador de legítimo peixe do mar em Estremoz, terra em que pelo menos uns dois terços dos habitantes não faziam ideia do que era o mar e onde ficava."*
O RIO DAS FLORES, Miguel Sousa Tavares

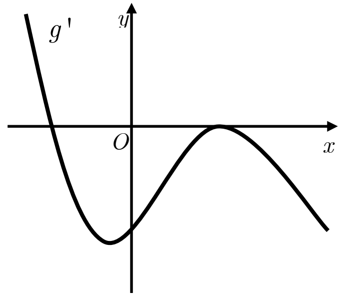
O Porfírio veio de uma pescaria com doze peixes, sendo dois terços bodiões. Ele vai arrumar os peixes na sua arca frigorífica.
Qual é a probabilidade de, entre os primeiros três que ele arrumar, pelo menos dois serem bodiões?

(A) $\dfrac{4\times {}^8C_2+{}^8C_3}{{}^{12}C_3}$ **(B)** $\dfrac{8\times {}^4C_2+{}^4C_3}{{}^{12}C_3}$ **(C)** $\dfrac{4\times {}^8C_2\times {}^8C_3}{{}^{12}C_3}$ **(D)** $\dfrac{4+{}^8C_2+{}^8C_3}{{}^{12}C_3}$

3. Sejam f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=\ln(\sqrt{x})$ e a sucessão de termo geral $a_n=\dfrac{3n+1}{n+5}$.
Indique o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$

(A) $\dfrac{2}{\ln 3}$ **(B)** $\dfrac{1}{\ln 3}$ **(C)** $\dfrac{\ln 3}{2}$ **(D)** $\ln 3$

4. Na figura ao lado está parte do gráfico da função g', **primeira derivada** de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.
De acordo com este gráfico, quantos mínimos relativos tem a função g?



(A) 0 **(B)** 1

(C) 2 **(D)** 3

5. Qual é o domínio da função definida por $h(x)=\pi+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$?

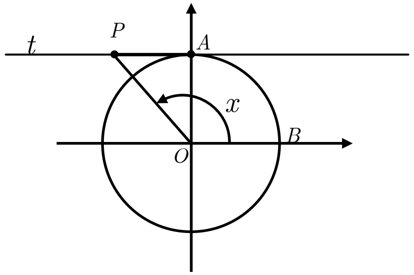
(A) $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}\right\}$

(B) $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}\right\}$

(C) $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: x=\frac{2\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\right\}$

(D) $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\right\}$

6. Na figura junta, a recta t é tangente à circunferência no ponto A e o ponto B pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox .

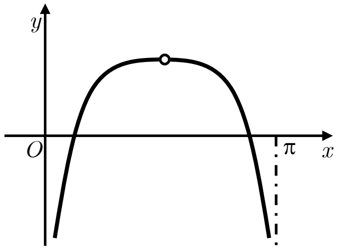


Considere que um ponto P se desloca sobre a recta t e, para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo POB $\left(x \in]0, \pi[\right)$.

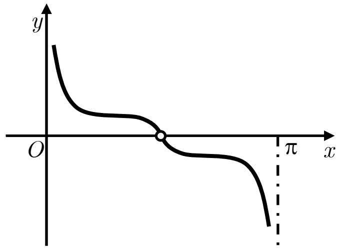
Seja d a função que, a cada valor de x , faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A .

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função $d\,'$, **primeira derivada** da função d ?

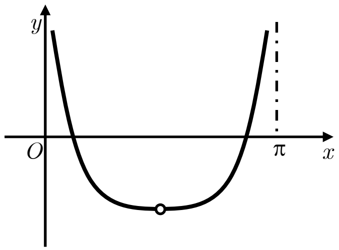
(A)



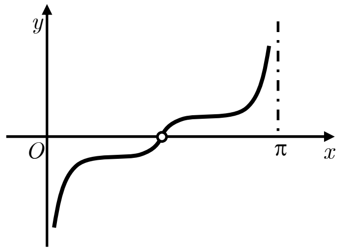
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Suponha que a taxa de desemprego em Portugal, em percentagem, a partir dos últimos anos da década de noventa do século passado pode ser dada pelo seguinte modelo:

$$d(t) = (0,6\,t - 1,2) \times \operatorname{sen}\,(0,3\,t - 0,6) + 4,2$$

Tenha em atenção que:

- t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde à taxa de desemprego registada em 1998;
- O argumento da função seno vem em radianos.

1.1. Admita que a população activa, em Portugal e em 2006, era de 6,2 milhões de pessoas.
Segundo este modelo, qual foi, aproximadamente, o número de pessoas que estavam desempregadas em 2006? Apresente o valor em milhares, arredondado às décimas.
Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, uma casa decimal.

1.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize, na janela $[0,10] \times [0,10]$, o gráfico da função d e reproduza-o na sua folha de prova.

Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja $d\,'$ a função derivada de d . O conjunto solução da inequação $d\,'(t) > 0$ é um intervalo aberto $]a, b[$. Determine os valores de a e de b . Apresente os resultados arredondados às unidades.

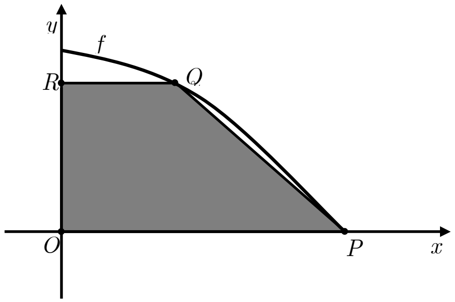
Justifique a sua resposta. **Interprete-a** no contexto do problema.

2. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = \cos\,x$.

2.1. Calcule o valor exacto de $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

2.2. Usando a definição de derivada num ponto, calcule $f\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

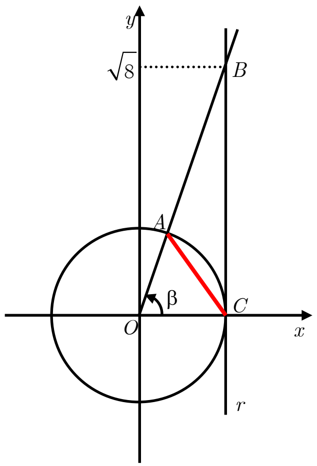
2.3. Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy, o gráfico da função f e o trapézio $[OPQR]$.



- O é a origem do referencial;
- P é um ponto que pertence ao gráfico de f e ao eixo das abcissas;
- Q é um ponto do gráfico de f;
- R pertence ao eixo das ordenadas.

O ponto Q desloca-se ao longo do gráfico de f de modo que as rectas OP e RQ são sempre paralelas. Exprima a área do trapézio $[OPQR]$ em função da abcissa de Q, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de Q (aproximada às centésimas) para a qual a área do trapézio é máxima.
Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:
– o gráfico obtido;
– o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

3. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy:



- o círculo trigonométrico;
- a recta r, de equação $x = 1$;
- o ponto A, intersecção da semi-recta $\dot{O}A$ com a fronteira do círculo trigonométrico;
- o ponto B, intersecção da recta OA com a recta r.
- o ângulo COA, de amplitude β.

Como a figura sugere, a ordenada de B é $\sqrt{8}$.

Mostre que $\overline{AC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Sugestão: considere um ponto A_1, projecção do ponto A no eixo Ox.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x\left(x^2 - 2\right)$.
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, sem utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

4.1. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{2\ln x}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Considere as seguintes afirmações:

– g *é contínua no ponto de abcissa* 1.
– g *apenas é contínua à esquerda do ponto de abcissa* 1.
– g *apenas é contínua à direita do ponto de abcissa* 1.

Apenas uma das afirmações anteriores é verdadeira. Indique-a, justificando convenientemente a resposta.

4.2. Verifique que $f''(x) = e^x\left(x^2 + 4x\right)$ e estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (140 pontos)	**1.**.............**40** 1.1.......18 1.2.......22	**2.**.............**42** 2.1.......13 2.2.......13 2.3.......16	**3.**.............**20**	**4.**.............**38** 4.1.......19 4.2.......19