Escola Secundária de Francisco Franco (2010/2011)

www.esffranco.edu.pt

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

3.º Período 8/06/11 Duração: 90 minutos

Nome: N.º: Classificação: ,

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Inscreveram-se todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal num dado cúbico equilibrado (um elemento por cada face).
Ao lançar esse dado duas vezes, qual é a probabilidade de saírem dois números pares?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{1}{18}$ **(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $\frac{2}{9}$

2. Uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, é tal que a sua **segunda derivada** está definida por

$$f''(x) = \ln\left(2^x - 1\right)$$

Em relação ao gráfico da função f, indique a afirmação verdadeira.

(A) Existem dois pontos de inflexão

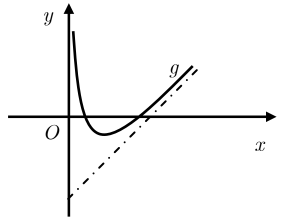
(B) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $]0, 2[$

(C) A concavidade está voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$

(D) A concavidade está voltada para cima no intervalo $]0, +\infty[$

3. Na figura ao lado estão representados o gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, e as suas assimptotas.

Quanto ao valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x - g(x)}{x}$:



(A) Não existe

(B) Ele pode ser igual a $-\infty$

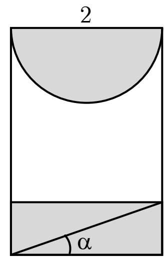
(C) Ele pode ser igual a -1

(D) Ele pode ser igual a 0

4. *"Acenou com a cabeça na direcção de Patrik, que estava ligeiramente afastado do semicírculo formado por Erica, Henrik e Birgit, em frente à secretária de Mellberg."*

A PRINCESA DE GELO, Camilla Läckberg

Dada a figura ao lado, admita que as áreas a sombreado do semicírculo e do quadrado são iguais.
Assim, pode-se concluir que:



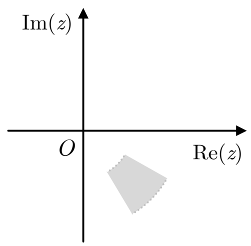
(A) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{8}$

(B) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{6}$

(C) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\pi}{8}$

(D) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\pi}{6}$

5. Dado o domínio plano representado no plano complexo ao lado, qual das condições seguintes pode definir em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada?



(A) $|z| < 1 \wedge |z| > 2 \wedge -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

(B) $|z| < 1 \wedge |z| > 2 \wedge -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

(C) $1 < |z| < 2 \wedge -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

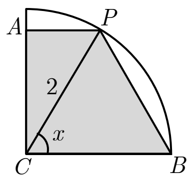
(D) $1 < |z| < 2 \wedge -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) < -\frac{\pi}{6}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. No quarto de circunferência de raio 2 da figura está representado, a sombreado, um trapézio $[ACBP]$



Considere que o ponto P percorre esse quarto de circunferência e, para cada posição desse ponto:

- seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PCB $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$
- seja f a área do trapézio $[ACBP]$ em função de x

Resolva as alíneas **1.1.** e **1.2.** sem recorrer à calculadora.

1.1. Mostre que $f(x) = 2\text{sen}x(1 + \cos x)$

1.2. Mostre que $f\,'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$ e determine o valor de x que maximiza a do trapézio $[ACBP]$

1.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o menor valor de x para o qual a área do trapézio $[ACBP]$ é ***metade*** *da área do quarto de círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s).
Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

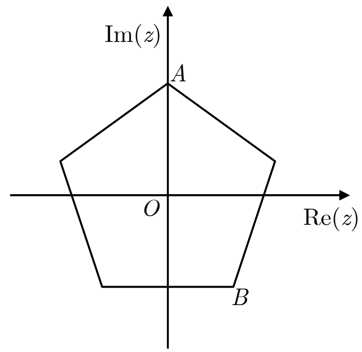
2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w = -1 - \sqrt{3}\,i$

Sem usar a calculadora:

2.1. Mostre que a imagem geométrica de $\frac{i \times w^6}{1+i}$ pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2.2. Determine as raízes cúbicas de w, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado, no plano complexo, um pentágono regular centrado na origem.
Sabe-se que:



- Os pontos A e B pertencem a esse pentágono e são as imagens geométricas de duas das raízes de índice n de um certo número complexo w
- O ponto A tem coordenadas $(0,2)$ e é a imagem geométrica de um complexo w_1
- O ponto B é a imagem geométrica de um complexo w_2

Sem recorrer à calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes.

3.1. Determine na forma trigonométrica:

3.1.1. $\frac{w_1}{-z}$, sendo $z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{7}$

3.1.2. $\overline{w_2}$

3.2. Escreva w na forma algébrica.

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = \sqrt{5} + 2\,i^{97}$ tal que α é um seu argumento.
Mostre que $w\,i = -3(\text{sen}\,\alpha - i\cos\alpha)$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	1. ....55 1.1. ....20 1.2. ....20 1.3. 15	2. ....35 2.1. ....15 2.2. 20	3. ....45 3.1.1. ....15 3.1.2. ....15 3.2. 15	4. 15