Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2008/2009)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 3

www.ebsaas.com 3.º Período 13/05/09 Duração: 90 minutos

Nome: ______________________ N.º: ____ Classificação: ___ , ___

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. *"Sobrecarregados com sacrifícios e dificuldades, os povos coloniais efectuaram a pulso a escalada da emancipação. Amordaçados, jamais dispuseram de condições para transpor a barreira das probabilidades."*

OS DIAS DO FIM, Ricardo de Saavedra

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$	a

(a representa um número positivo inferior a 1).

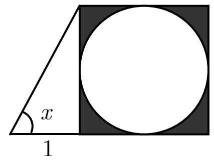
Qual é o valor de a?

(A) $2 - \log_3 2$ **(B)** $2 - \log_2 3$ **(C)** $1 - \log_3 2$ **(D)** $1 - \log_2 3$

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 2

3. Na figura junta está representada uma circunferência inscrita num quadrado. O lado desse quadrado é igual à altura de um triângulo de base igual a uma unidade.



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada em função de x?

(A) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}^2 x$ **(B)** $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\cos^2 x$ **(C)** $\mathrm{tg}^2 x - \pi^2$ **(D)** $\cos^2 x - \pi^2$

4. Seja g uma função derivável em $\mathbb{R}$ e considere a tabela do sinal da função g'', **segunda derivada** de g:

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
Sinal de g''	$-$	0	$-$	0	$+$

Segundo esta tabela, é possível concluir que:

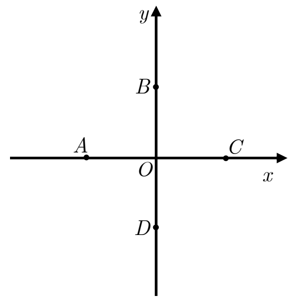
(A) Há um máximo relativo em $x = 2$.

(B) Há um mínimo relativo em $x = 3$.

(C) Há um ponto de inflexão, de abcissa igual a 3 .

(D) Há dois pontos de inflexão, de abcissas 2 e 3 .

5. De um número complexo z, sabe-se que a sua imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.
Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica do complexo z^2?



(A) O ponto A **(B)** O ponto B

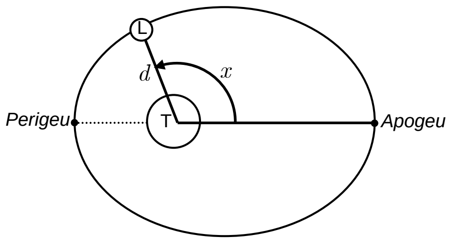
(C) O ponto C **(D)** O ponto D

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Como sabe, a Lua descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Na elipse da figura está representado um esquema dessa órbita, estando também assinalados dois pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado da Terra e o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo da Terra.



Além disso, na figura está também assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi]$). Este ângulo tem o seu vértice no centro da Terra, o seu lado origem passa no *apogeu* e o seu lado extremidade passa na Lua.

Admita que, para cada valor de x, t representa um dia do mês de Novembro ou de Dezembro de 2008, sendo t aproximadamente dado por

$$t = \operatorname{sen}(0{,}1x) + 4{,}7x - 3$$

(Neste modelo matemático, $t \in [-3, 27]$ e sabe-se que $t = 0$ corresponde um valor de x no dia 30 de Novembro de 2008, $t = 1$ corresponde um valor de x no dia 1 de Dezembro de 2008, e assim sucessivamente.)

Admita também que a distância, em milhares de quilómetros, da Terra à Lua, é (aproximadamente) dada, em função de t, por

$$d = 0{,}4t^2 - 9{,}6t + 420{,}6$$

1.1. No final de 2008, foi noticiado que a Lua passou no *perigeu*. Indique o dia e o mês e também a distância que a Lua esteve da Terra (em milhares de quilómetros).

1.2. Nos primeiros dias de Dezembro de 2008, a Lua encontrou-se a 385 milhares de quilómetros de distância da Terra. Determine o valor de x nessas circunstâncias. Apresente-o em radianos, arredondado às centésimas.

Percorra os seguintes passos:

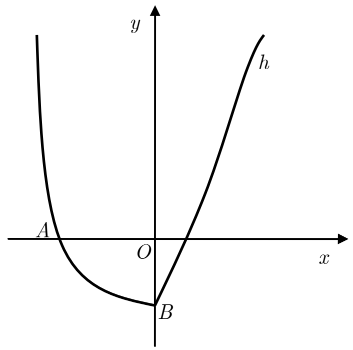
- Considerando a janela de visualização $[-3, 27] \times [0, 500]$, visualize os gráficos necessários (inclusive o de d) e determine, com quatro casas decimais, o valor de t;
- Considerando a janela de visualização $[0, 2\pi] \times [-3, 27]$, visualize os gráficos necessários (inclusive o de t) e determine, com duas casas decimais, o valor de x.

2. Considere a função g, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = \sqrt{3}\,x - \cos(2x)$.

2.1. Mostre que $g''(x) = 4\cos(2x)$ e, sem recorrer à calculadora, indique as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g.

2.2. Na figura ao lado está representado o gráfico de h, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}; 1{,}5\right]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} - 2 & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\[2ex] g(x) & \text{se } 0 \le x \le 1{,}5 \end{cases}$$



Na figura estão também o ponto A (cuja abcissa é um zero de h) e o ponto B (de abcissa 0).

2.2.1. Usando processos analíticos, mostre que, tal como a figura sugere, h é contínua no ponto 0.

2.2.2. Recorrendo à calculadora, determine o comprimento do segmento $[AB]$. Explique como procedeu, apresentando o resultado arredondado às centésimas. Sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 - 5x + 5)e^x$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

4. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, considere

$$z_1 = 2 - 3\,i \quad \text{e} \quad z_2 = -20 + 4\,i\,.$$

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

4.1. Calcule a e b de modo que $a\,i + 2b - b\,i^{37}$ seja igual a z_1.

4.2. Escreva na forma algébrica o complexo $\frac{z_2}{z_1}$ e mostre que ele é solução da equação $z^2 - 2z = 8 + 40\,i$.

4.3. Sejam A e B as imagens algébricas, respectivamente, de z_1 e do seu conjugado, $\overline{z}_1$.

Esboce, no plano complexo, o triângulo $[ABO]$ e determine o seu perímetro (O é a origem do referencial).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	**1.**..........34 1.1..........16 1.2..........18	**2.**..........50 2.1..........18 2.2.1..........16 2.2.2..........16	**3.**..........19	**4.**..........47 4.1..........13 4.2..........17 4.3..........17