Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2008/2009)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

www.ebsaas.com 3.º Período 13/05/09 Duração: 90 minutos

Nome: ______________ N.º: ____ Classificação: ___ , ___

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

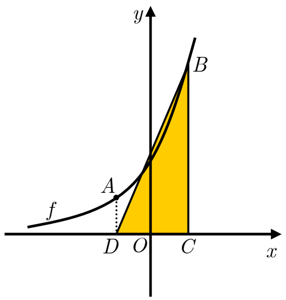
1. *"Nas últimas duas semanas quintuplicaram a emissão de cheques sem cobertura e a falta de pagamento de letras."*

OS DIAS DO FIM, Ricardo de Saavedra

No referencial da figura ao lado está o triângulo $[BCD]$ e parte do gráfico da função f.

Sabe-se que:

- $f(x) = 5^x$;
- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f ;
- as abcissas dos pontos A e D são iguais;
- a ordenada do ponto A é igual a $\frac{1}{2}$;
- as abcissas dos pontos B e C são iguais a $\frac{1}{2}$.



Qual é o valor da área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{5\left(\log_2 5+0{,}5\right)}{2}$ **(B)** $\frac{\left(\log_5 2+0{,}5\right)\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\frac{5(\ln 2+0{,}5)}{2}$ **(D)** $\frac{(\ln 5+0{,}5)\sqrt{5}}{2}$

Testes de Matemática A do 12.º ano: enunciados e resoluções (2008/2009)

2. Seja g uma função derivável em $\mathbb{R}$ e considere a tabela do sinal da função g'', **segunda derivada** de g :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Sinal de g''		$-$	0	$-$	0	$+$	

Segundo esta tabela, é possível concluir que:

(A) Há um máximo relativo em $x = 2$.

(B) Há um mínimo relativo em $x = 3$.

(C) Há um ponto de inflexão, de abcissa igual a 3 .

(D) Há dois pontos de inflexão, de abcissas 2 e 3 .

3. Quanto ao valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\operatorname{sen} x}{x}$:

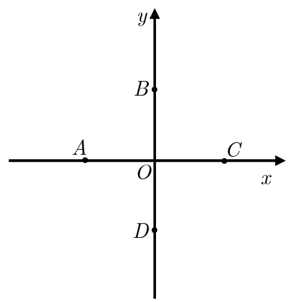
(A) Ele é igual a 0 **(B)** Ele é igual a $+\infty$

(C) Ele é igual a 2 **(D)** Ele não existe

4. Para escrever a palavra-passe num portal da *internet*, são necessários cinco dígitos: os primeiros três são letras (de entre 23) e os dois restantes são algarismos.
De quantas maneiras distintas é possível escrever a palavra-passe se apenas uma das letras for vogal e os algarismos representarem um número par?

(A) $2\,645$ **(B)** $12\,167$ **(C)** $81\,000$ **(D)** $243\,000$

5. De um número complexo z, sabe-se que $Arg(z) = \frac{\pi}{9}$.
Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A , B , C ou D) pode ser a imagem geométrica do complexo cujo argumento é igual a $Arg(\overline{z}) + Arg(-z)$?



(A) O ponto A **(B)** O ponto B

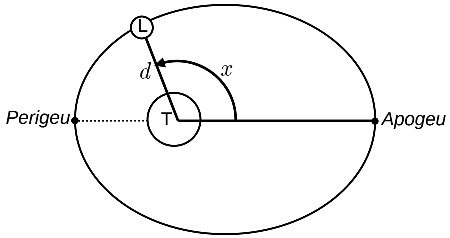
(C) O ponto C **(D)** O ponto D

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Como sabe, a Lua descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Na elipse da figura está representado um esquema dessa órbita, estando também assinalados dois pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado da Terra e o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo da Terra.



Além disso, na figura está também assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi]$). Este ângulo tem o seu vértice no centro da Terra, o seu lado origem passa no *apogeu* e o seu lado extremidade passa na Lua.

Admita que, para cada valor de x , t representa um dia do mês de Novembro ou de Dezembro de 2008, sendo t aproximadamente dado por

$$t = \operatorname{sen}(0,1x) + 4,7x - 3$$

(Neste modelo matemático, $t \in [-3, 27]$ e sabe-se que $t = 0$ corresponde um valor de x no dia 30 de Novembro de 2008, $t = 1$ corresponde um valor de x no dia 1 de Dezembro de 2008, e assim sucessivamente.)

Admita também que a distância, em milhares de quilómetros, da Terra à Lua, é (aproximadamente) dada, em função de t , por

$$d = 0,4t^2 - 9,6t + 420,6$$

1.1. No final de 2008, foi noticiado que a Lua passou no *perigeu*. Indique o dia e o mês e também a distância que a Lua esteve da Terra (em milhares de quilómetros).

1.2. Nos primeiros dias de Dezembro de 2008, a Lua encontrou-se a 385 milhares de quilómetros de distância da Terra. Determine o valor de x nessas circunstâncias. Apresente-o em radianos, arredondado às centésimas.

Percorra os seguintes passos:

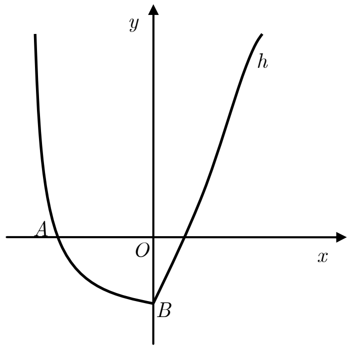
- Considerando a janela de visualização $[-3, 27] \times [0, 500]$, visualize os gráficos necessários (inclusive o de d) e determine, com quatro casas decimais, o valor de t ;
- Considerando a janela de visualização $[0, 2\pi] \times [-3, 27]$, visualize os gráficos necessários (inclusive o de t) e determine, com duas casas decimais, o valor de x .

2. Considere a função g , de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = \sqrt{3}\,x - \cos(2x)$.

2.1. Sem recorrer à calculadora, estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

2.2. Na figura ao lado está representado o gráfico de h , de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}; 1,5\right]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} - 2 & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ g(x) & \text{se } 0 \le x \le 1,5 \end{cases}$$



Na figura estão também o ponto A (cuja abcissa é um zero de h) e o ponto B (de abcissa 0).

2.2.1. Usando processos analíticos, mostre que, tal como a figura sugere, h é contínua no ponto 0 .

2.2.2. Recorrendo à calculadora, determine o comprimento do segmento $[AB]$. Explique como procedeu, apresentando o resultado arredondado às centésimas. Sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 2x^2 + \ln x$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, mostre que $f''(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$ e justifique que o gráfico de f tem apenas um ponto de inflexão.

4. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, considere

$$z_1 = 2 - 3\,i \quad \text{e} \quad z_2 = -20 + 4\,i\,.$$

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

4.1. Calcule a e b de modo que $a\,i + 2b - b\,i^{37}$ seja igual a z_1.

4.2. Escreva na forma trigonométrica o complexo $\frac{z_2}{z_1}$.

4.3. Seja $z_3 = 40\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Mostre que $z_2 - z_3$ é um imaginário puro.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	**1.**..............34 1.1..............16 1.2..............18	**2.**..............48 2.1..............16 2.2.1..............16 2.2.2..............16	**3.**..............21	**4.**..............47 4.1..............13 4.2..............17 4.3..............17