



Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2007/2008)

**5.º TESTE DE MATEMÁTICA A**

12.º 2

www.esaas.com

3.º Período

21/04/08

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Cl. assi. fi. cação:   ,

0 professor:

**Grupo I**

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. “(...) e agora ali estavam eles sentados nos seus magníficos lugares à sombra, contemplando a Maestranza a encher-se de uma multidão que, mesmo assim, seria apenas uma terça parte dos que tinham içado lá fora e que aparentemente se iriam contentar em seguir a corrida [de touros] através das reacções que vinham lá de dentro (...)”

O RIO DAS FLORES, Miguel Sousa Tavares

Dos frequentadores de uma tourada, constatou-se que:

- Um terço são mulheres;
- 20 % dos homens preferem o toureiro A.

Escolhe-se, ao acaso, um dos frequentadores da tourada. Qual é a probabilidade de ele ser um homem que não prefere o toureiro A?

- (A)  $\frac{8}{15}$       (B)  $\frac{7}{15}$       (C)  $\frac{2}{15}$       (D)  $\frac{1}{15}$

2. Uma associação de consumidores analisou uma amostra de 3300 ovos, sendo o seu peso considerado uma variável  $N(63, 5)$ . Qual é o número aproximado de ovos analisados que pertencem à classe XL?

- (A) 1650      (B) 75  
(C) 524      (D) 44

<p>CLASSE DOS OVOS CONSOANTE O SEU PESO P EM GRAMAS</p> <p>XL (Muito grande): <math>P \geq 73</math> L (Grande): <math>63 \leq P &lt; 73</math> M (Médio): <math>53 \leq P &lt; 63</math> S (Pequeno): <math>P &lt; 53</math></p>
---

3. A primeira derivada de uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , é dada por

$$g'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de  $g$ ?

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3

4. Sejam  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = \ln(\sqrt{x})$  e a sucessão de termo geral

$$a_n = \frac{3n+1}{n+5}.$$

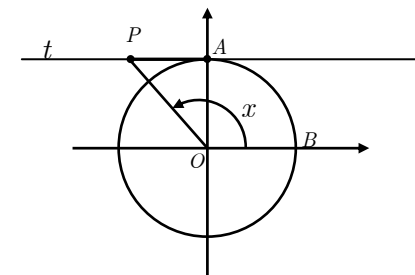
Indique o valor de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)$ .

- (A)  $\frac{2}{\ln 3}$       (B)  $\frac{1}{\ln 3}$       (C)  $\frac{\ln 3}{2}$       (D)  $\ln 3$

5. Qual é o domínio da função definida por  $h(x) = \pi + \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ?

- (A)  $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}$   
 (B)  $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}$   
 (C)  $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$   
 (D)  $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$

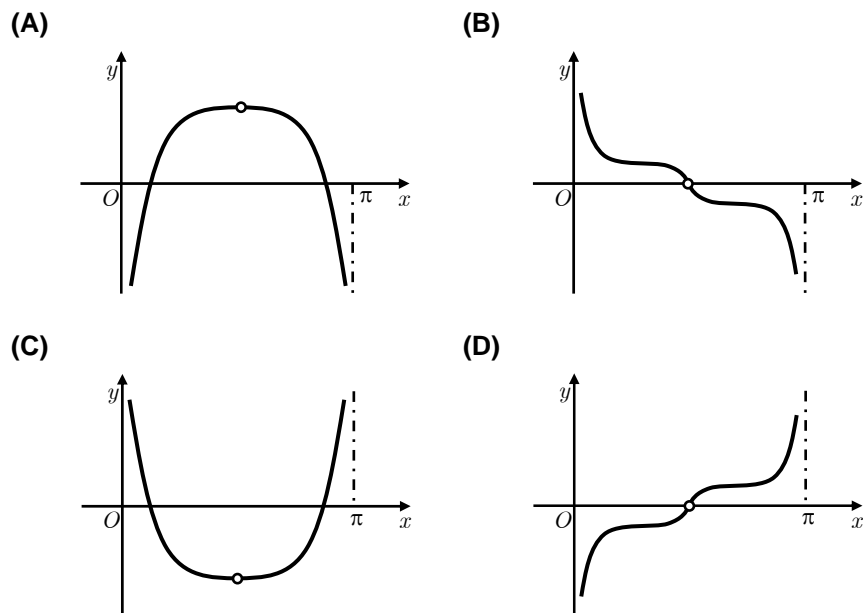
6. Na figura junta, a recta  $t$  é tangente à circunferência no ponto  $A$  e o ponto  $B$  pertence à circunferência e ao semieixo positivo  $Ox$ .



Considere que um ponto  $P$  se desloca sobre a recta  $t$  e, para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $POB$  ( $x \in ]0, \pi[$ ).

Seja  $d$  a função que, a cada valor de  $x$ , faz corresponder a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$ .

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função  $d'$ , primeira derivada da função  $d$ ?



**Grupo II**

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Suponha que a taxa de desemprego em Portugal, em percentagem, a partir dos últimos anos da década de noventa do século passado pode ser dada pelo seguinte modelo:

$$d(t) = (0,6t - 1,2) \times \sin(0,3t - 0,6) + 4,2$$

Tenha em atenção que:

- $t$  é medido em anos e que o instante  $t = 0$  corresponde à taxa de desemprego registada em 1998;
- O argumento da função seno vem em radianos.

1.1. Admita que a população activa, em Portugal e em 2006, era de 6,2 milhões de pessoas. Segundo este modelo, qual foi, aproximadamente, o número de pessoas que estavam desempregadas em 2006? Apresente o valor em milhares, arredondado às décimas. Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, uma casa decimal.

1.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize, na janela  $[0, 10] \times [0, 10]$ , o gráfico da função  $d$  e reproduza-o na sua folha de prova.

Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja  $d'$  a função derivada de  $d$ . O conjunto solução da inequação  $d'(t) > 0$  é um intervalo aberto  $]a, b[$ . Determine os valores de  $a$  e de  $b$ . Apresente os resultados arredondados às unidades.

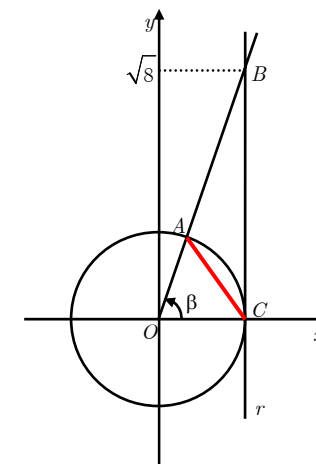
Justifique a sua resposta. **Interprete-a** no contexto do problema.

2. “Quando o touro ficou sozinho no centro da praça, castigo mas ativo, Juan Belmonte afastou-se das tábuas, deu uns passos em frente e, com um gesto circular da mão, dedicou o terceiro tércio, que se iria seguir, a toda a assistência.”

O RIO DAS FLORES, Miguel Sousa Tavares

Na figura junta estão representados, em referencial o. n.  $xOy$ :

- o círculo trigonométrico;
- a recta  $r$ , de equação  $x = 1$ ;
- o ponto  $A$ , intersecção da semi-recta  $\hat{O}A$  com a fronteira do círculo trigonométrico;
- o ponto  $B$ , intersecção da recta  $OA$  com a recta  $r$ .
- o ângulo  $COA$ , de amplitude  $\beta$ .



Como a figura sugere, a ordenada de  $B$  é  $\sqrt{8}$ .

Mostre que  $\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**Sugestão:** considere um ponto  $A_1$ , projecção do ponto  $A$  no eixo  $Ox$ .

3. Na figura está representado o círculo trigonométrico e o rectângulo  $[ABDE]$ .

Considere que o ponto  $P$  se desloca sobre a circunferência mas apenas no primeiro quadrante.

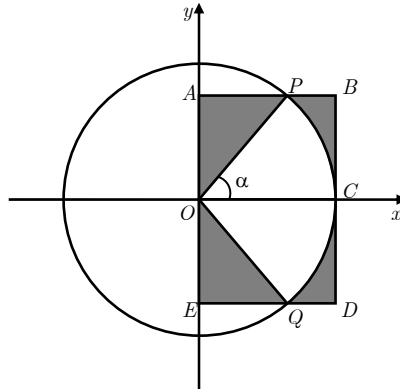
O ponto  $Q$  acompanha o movimento do ponto  $P$  no quarto quadrante de tal

forma que se tem sempre  $AO = OE$ ;

O ponto  $C$  tem de coordenadas  $(1, 0)$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo

$POC$  ( $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ).



3.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de  $\alpha$ , por

$$A(\alpha) = 2\text{sen } \alpha - \alpha$$

3.2. Sem usar a calculadora, determine a área máxima dessa região sombreada.

3.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de  $\alpha$  para os quais a área da região sombreada é igual um sexto da área do círculo trigonométrico?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s).

Apresente os resultados na forma de dízima, arredondados às centésimas.

3.4. Estude, quanto à existência de assíntotas, a função  $f$  definida em  $]0, \frac{\pi}{2}[$

por  $f(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{\alpha^2}$

4. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ \ln x - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

- $g$  é contínua no ponto de abcissa 1.
- $g$  apenas é contínua à esquerda do ponto de abcissa 1.
- $g$  apenas é contínua à direita do ponto de abcissa 1.

Apenas uma das afirmações anteriores é verdadeira. Utilizando apenas métodos analíticos, indique-a, justificando convenientemente a resposta.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10		Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0	
Grupo II (140 pontos)	1. .... 44	2. .... 20	3. .... 56	4. .... 20
	1. 1. .... 20		3. 1. .... 14	
	1. 2. .... 24		3. 2. .... 14	
			3. 3. .... 14	
			3. 4. .... 14	