Escola Secundária de Francisco Franco (2009/2010)

www.esffranco.edu.pt

Resumo do 5º e 6º testes de Matemática A

12º ano

1. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) =$

Considere ainda as seguintes afirmações:

(i) A função f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Assim, é possível concluir que:

(A) A afirmação (i) é verdadeira e a (ii) é falsa.

(B) A afirmação (i) é falsa e a (ii) é verdadeira.

(C) Ambas as afirmações são verdadeiras.

(D) Ambas as afirmações são falsas.

2. É dada a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, definida por

O gráfico de g contém alguns pontos onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox.
Qual é o conjunto das abcissas desses pontos?

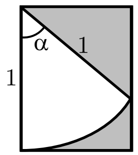
(A) $\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{3\pi}}{4}\right\}$ **(B)** $\left\{0, \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{3\pi}}{4}\right\}$

(C) $\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right\}$ **(D)** $\left\{0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right\}$

3. *"Tratava-se de uma gravura em aço, representando um edifício oval, com janelas rectangulares e uma pequena torre na fachada."*

1984, George Orwell

Na figura junta, temos um sector circular de amplitude α e raio 1 inscrito num rectângulo em que um dos lados vale também 1.
Qual das expressões seguintes dá a área da parte sombreada em função de α?



(A) $\operatorname{sen} \alpha - \frac{\alpha}{2}$ **(B)** $\operatorname{sen} \alpha - 2\alpha$

(C) $\cos \alpha - \frac{\alpha}{2}$ **(D)** $\cos \alpha - 2\alpha$

4. No círculo trigonométrico da figura, está representado o ângulo de amplitude $\frac{11\pi}{36}$, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade o segmento de recta $[OA]$).

Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $\overline{AB}$?

(A) $0{,}68$ **(B)** $0{,}76$ **(C)** $0{,}84$ **(D)** $0{,}92$

5. Seja h a função definida por .
Qual é a expressão geral das equações das assimptotas verticais do gráfico de h?

(A) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ **(B)** $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

(C) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ **(D)** $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por .

1.1. **Sem usar a calculadora**, resolva os três itens seguintes:

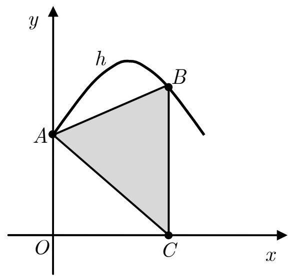
1.1.1. Determine o contradomínio de h.

1.1.2. Mostre que 4π é o período de h.

1.1.3. Seja α um número tal que $\pi < \alpha < 2\pi \wedge \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}$.
Determine $h(\alpha)$.

1.2. Na figura ao lado encontra-se parte do gráfico da função h no domínio $[0, 2\pi]$ e um triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

- A é o ponto do gráfico de h que pertence ao eixo Oy;
- B é um ponto do gráfico de h de ordenada 6;
- C é um ponto do eixo Ox de abcissa igual à do ponto B.



Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo $[ABC]$.

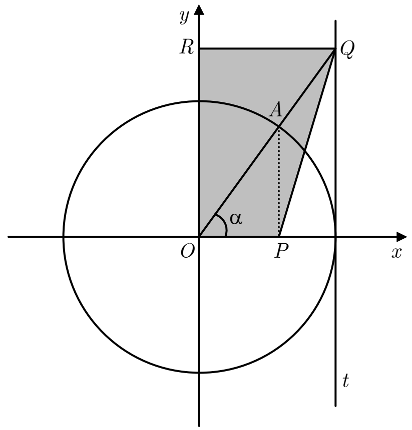
Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize aproximações às décimas.

2. De uma função g, de domínio $[0, \pi]$, sabe-se que o seu gráfico passa no ponto $A(0, \pi)$ e que a sua **primeira derivada** está definida, igualmente no intervalo $[0, \pi]$, por $g'(x) =$. **Usando exclusivamente métodos analíticos**:

2.1. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto A.

2.2. Estude a função g quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

3. Na figura está representado, no círculo trigonométrico, o trapézio $[OPQR]$.



Tal como é sugerido pela figura:

- t é a recta tangente ao círculo e é perpendicular ao eixo Ox;
- P pertence ao eixo Ox;
- Q pertence à recta t;
- R pertence ao eixo Oy;
- A é o ponto de intersecção entre a recta OQ e a circunferência.

Considere que o ponto Q se desloca sobre a recta t mas apenas no primeiro quadrante.

Os pontos A, P e R acompanham o movimento do ponto Q de tal forma que a recta AP é sempre paralela à recta t e a ordenada de R é igual à de Q.

Para cada posição do ponto Q, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo POA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ e seja f a área do trapézio $[OPQR]$ em função de α.

3.1. Mostre que $f(\alpha) =$

3.2. Determine a área do trapézio $[OPQR]$ quando as duas coordenadas do ponto Q são iguais.

3.3. Calcule, **analiticamente**, $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

1. Três raparigas e três rapazes sentam-se em seis cadeiras dispostas lado a lado num cinema.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que as raparigas ficam todas juntas?

(A) 144 **(B)** 72 **(C)** 36 **(D)** 18

2. *"Castanhos, provavelmente, mas por vezes as pessoas de cabelo escuro têm olhos azuis."*
1984, George Orwell

Sobre uma população de uma cidade, sabe-se que:

- 80% dos habitantes têm o cabelo castanho;
- 30% dos habitantes têm olhos azuis;
- todos os habitantes têm o cabelo castanho ou olhos azuis.

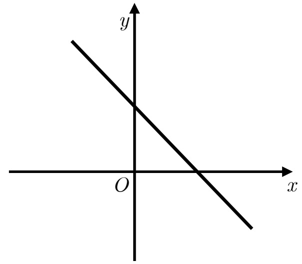
Ao escolher um habitante ao acaso dessa cidade, qual é a probabilidade de ele

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{9}$

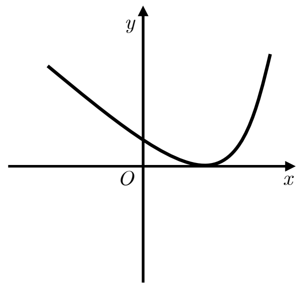
3. De uma função g de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

Qual dos seguintes **não pode** representar o gráfico da função g', **primeira derivada** de g?

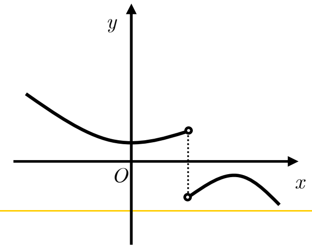
(A)



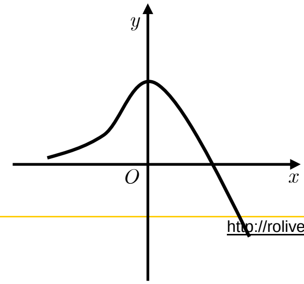
(B)



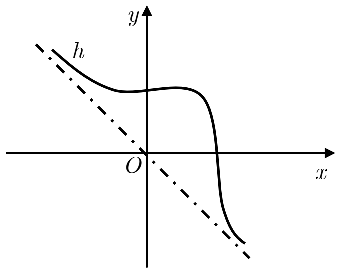
(C)



(D)



4. Sobre o gráfico de uma função h de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes pares é a única assimptota (tal como se pode ver na figura).
Indique o valor de .



(A) 1 **(B)** 0

(C) $+\infty$ **(D)** $-\infty$

1. Sejam as funções f e g, ambas de domínio $]-3,+\infty[$, definidas por $f(x) =$ e por $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{8}$

Resolva os dois itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**.

1.1. Usando a **definição de derivada num ponto**, calcule $f\,'(0)$

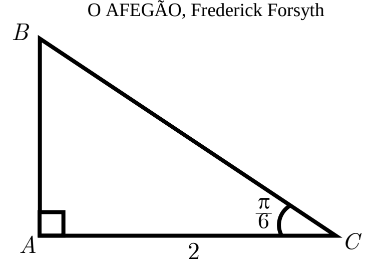
1.2. Verifique que $g\,''(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+3)^2}$ e estude g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

1. *"Esta seria evidentemente uma viagem triangular para um navio de carga britânico."*
O AFEGÃO, Frederick Forsyth

Na figura está representado um triângulo $[ABC]$, rectângulo em A.

Sabe-se que $\overline{AC} = 2$ e que a amplitude do ângulo ACB é igual a $\frac{\pi}{6}$.

Qual é o valor de ?



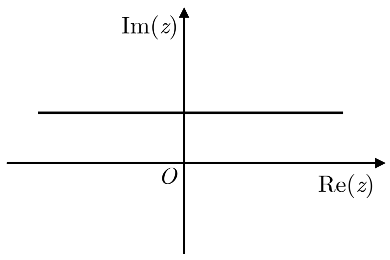
(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Considere o número complexo $z =$, em que $b < 0$.
Dos seguintes números, qual é o que pode representar o número $\bar{z}$, **conjugado** do complexo z?

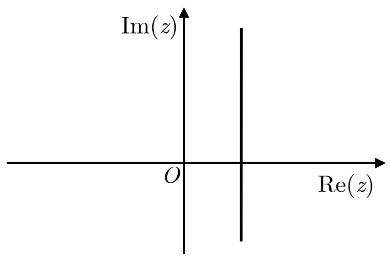
(A) $\operatorname{cis}\frac{2\pi}{5}$ **(B)** $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$ **(C)** $\operatorname{cis}\frac{9\pi}{7}$ **(D)** $\operatorname{cis}\frac{15\pi}{8}$

3. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos pela condição, definida em $\mathbb{C}$, por $iz = \bar{z}$?

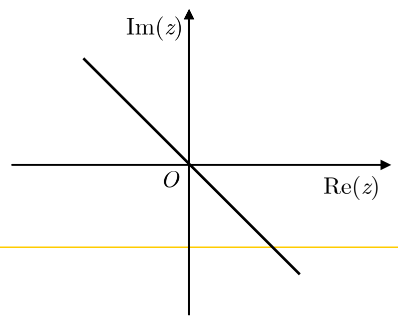
(A)



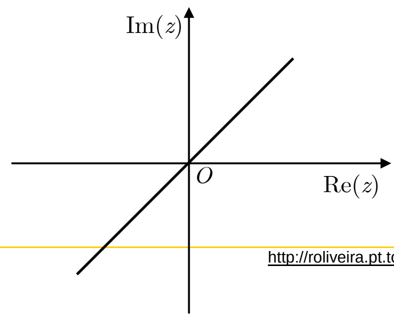
(B)



(C)



(D)



4. Na figura está representado um pentágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 5 de um certo número complexo.
Os pontos A e B pertencem a esse pentágono;
O ponto A pertence ao eixo Oy ;
O ponto B pertence primeiro quadrante.

Qual dos seguintes números complexos pode ter por imagem geométrica o vértice B ?

(A) $\operatorname{cis}\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\operatorname{cis}\frac{\pi}{7}$ **(C)** $\operatorname{cis}\frac{\pi}{10}$ **(D)** $\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}$

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, sabe-se que o número complexo é um imaginário puro.
Indique dois possíveis valores para n .

(A) 2 e 6 **(B)** 2 e 4 **(C)** 3 e 7 **(D)** 3 e 5

1. O Ildefonso fez a seguinte experiência: tirou um cubo de gelo do congelador, deixou-o à temperatura ambiente durante alguns minutos, voltou a meter o cubo no congelador e tirou-o novamente passado algum tempo.
Considere que, nos primeiros 9 minutos da experiência, a temperatura do cubo de gelo (em graus Celsius) foi dada, após t minutos, pela função definida por

(a variável t vem em radianos)

1.1. **Usando exclusivamente métodos analíticos** (e a calculadora para eventuais cálculos numéricos), determine quanto tempo passou desde que o cubo de gelo foi reintroduzido no congelador até ser novamente retirado. Apresente o resultado em minutos e segundos (com estes arredondados às unidades).
Em caso de cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

1.2. Durante a experiência, quantas vezes a temperatura do cubo de gelo foi igual a -8 graus Celsius? **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, indique, em minutos e arredondado às centésimas, quanto tempo passou para cada caso.
Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) para a resolução do problema.

2. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, o número

2.1. Sejam A a imagem geométrica de z e B a imagem geométrica de z^4 .
Sendo O a origem do referencial no plano complexo, **represente** o triângulo $[ABO]$ nesse plano e **determine** a sua área.

2.2. Determine, na forma trigonométrica, todas as raízes de índice n de z sabendo que as suas imagens geométricas formam os vértices de um triângulo equilátero.

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

a e b são números reais. Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

3.1. Os números w_1 e w_2 podem ser iguais? Justifique a resposta.

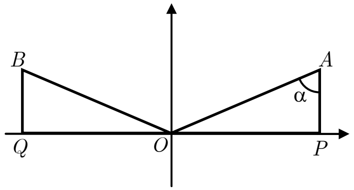
3.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $5z + 2i = w_1 - 1 + z\,i$, apresentando a sua solução na forma algébrica.

3.3. Calcule $\dfrac{(w_3-4)^4}{4\operatorname{cis}\frac{\pi}{5}}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

3.4. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, por:

$$|z-w_1| \leq |w_3| \wedge \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

4. Na figura estão representados, no plano complexo, dois triângulos rectângulos geometricamente iguais, $[OPA]$ rectângulo em P e $[OQB]$ rectângulo em Q .



Sabe-se que:

- Os pontos P e Q pertencem ao eixo real;
- α é a amplitude do ângulo AOP ;
- $\dfrac{\overline{AP}+\overline{OP}}{\overline{OP}} = \sqrt{2}$

Suponha que z é a imagem geométrica de B .

1. *"Os nomes de código eram fornecidos por um computador por meio de um processo conhecido como selecção aleatória, cuja finalidade era não revelar absolutamente nada."*

O AFEGÃO, Frederick Forsyth

Considere que uma palavra-passe num sítio da internet pode ser formada por seis dígitos (com algarismos e/ou letras das 23 existentes). Ao escolher uma aleatoriamente, qual é a probabilidade de ela ter, pelo menos, uma letra?

2. Na figura ao lado, -1 é o único zero da função g e o ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão do gráfico de g .

Qual é a afirmação **necessariamente falsa**?

(A) $g''(-1) = -3$ **(B)** $g''(0) = -1$

(C) $g''(1) = 0$ **(D)** $g''(3) = -1$

3. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R}$. Tal como a figura sugere, o ponto de abcissa 1 é um ponto de descontinuidade do gráfico de f .

Considere a sucessão definida por $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Qual pode ser o valor de $\lim_{n \to +\infty} f(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -1

2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) =$

Sem usar a calculadora, determine, se existirem, as equações das assimptotas do gráfico de g .