Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2008/2009)

www.ebsaas.com

Resumo do 5º e 6º testes de Matemática A

12º ano

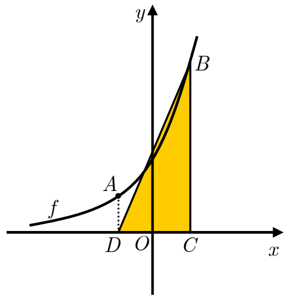
1. *"Nas últimas duas semanas quintuplicaram a emissão de cheques sem cobertura e a falta de pagamento de letras."*

OS DIAS DO FIM, Ricardo de Saavedra

No referencial da figura ao lado está o triângulo $[BCD]$ e parte do gráfico da função f.

Sabe-se que:

- $f(x) =$;
- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f;
- as abcissas dos pontos A e D são iguais;
- a ordenada do ponto A é igual a $\frac{1}{2}$;
- as abcissas dos pontos B e C são iguais a $\frac{1}{2}$.



Qual é o valor da área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{5\left(\log_2 5+0{,}5\right)}{2}$ **(B)** $\frac{\left(\log_5 2+0{,}5\right)\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\frac{5(\ln 2+0{,}5)}{2}$ **(D)** $\frac{(\ln 5+0{,}5)\sqrt{5}}{2}$

2. Seja g uma função derivável em $\mathbb{R}$ e considere a tabela do sinal da função g'', **segunda derivada** de g:

No que se refere à função g e segundo esta tabela, é possível concluir que:

(A) Há um máximo relativo em $x = 2$.

(B) Há um mínimo relativo em $x = 3$.

(C) Há um ponto de inflexão no seu gráfico, de abcissa igual a 3.

(D) Há dois pontos de inflexão no seu gráfico, de abcissas 2 e 3.

3. Quanto ao valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\operatorname{sen} x}{x}$:

(A) Ele é igual a 0 **(B)** Ele é igual a $+\infty$

(C) Ele é igual a 2 **(D)** Ele não existe

4. Para escrever a palavra-passe num portal da *internet*, são necessários cinco dígitos: os primeiros três são letras (de entre 23) e os dois restantes são algarismos.

(A) 2645 **(B)** $12\,167$ **(C)** $81\,000$ **(D)** $243\,000$

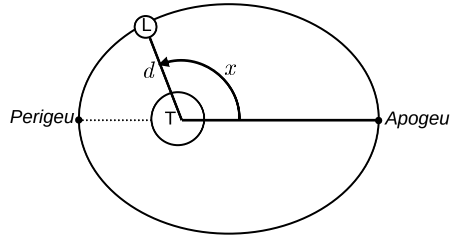
5. De um número complexo z, sabe-se que $Arg(z) = \frac{\pi}{9}$.

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica do complexo cujo argumento é igual a $Arg(\overline{z}) + Arg(-z)$?

(A) O ponto A **(B)** O ponto B

(C) O ponto C **(D)** O ponto D

1. Como sabe, a Lua descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Na elipse da figura está representado um esquema dessa órbita, estando também assinalados dois pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado da Terra e o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo da Terra.



Além disso, na figura está também assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi]$). Este ângulo tem o seu vértice no centro da Terra, o seu lado origem passa no *apogeu* e o seu lado extremidade passa na Lua.

Admita que, para cada valor de x, t representa um dia do mês de Novembro ou de Dezembro de 2008, sendo t aproximadamente dado por

(Neste modelo matemático, $t \in [-3, 27]$ e sabe-se que $t = 0$ corresponde um valor de x no dia 30 de Novembro de 2008, $t = 1$ corresponde um valor de x no dia 1 de Dezembro de 2008, e assim sucessivamente.)

Admita também que a distância, em milhares de quilómetros, da Terra à Lua, é (aproximadamente) dada, em função de t, por

1.1. No final de 2008, foi noticiado que a Lua passou no *perigeu*. Indique o dia e o mês e também a distância que a Lua esteve da Terra (em milhares de quilómetros).

1.2. Nos primeiros dias de Dezembro de 2008, a Lua encontrou-se a 385 milhares de quilómetros de distância da Terra. Determine o valor de x nessas circunstâncias. Apresente-o em radianos, arredondado às centésimas.

Percorra os seguintes passos:

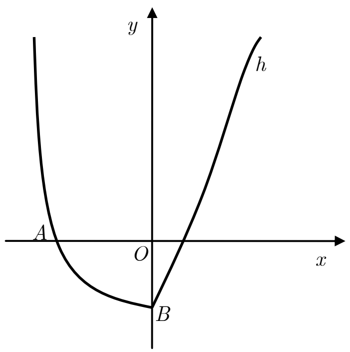
- Considerando a janela de visualização $[-3, 27] \times [0, 500]$, visualize os gráficos necessários (inclusive o de d) e determine, com quatro casas decimais, o valor de t;
- Considerando a janela de visualização $[0, 2\pi] \times [-3, 27]$, visualize os gráficos necessários (inclusive o de t) e determine, com duas casas decimais, o valor de x.

2. Considere a função g, de domínio $[0, \pi]$, definida por.

2.1. Sem recorrer à calculadora, estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

2.2. Na figura ao lado está representado o gráfico de h, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}; 1,5\right]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} - 2 & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ g(x) & \text{se } 0 \le x \le 1,5 \end{cases}$$



Na figura estão também o ponto A (cuja abcissa é um zero de h) e o ponto B (de abcissa 0).

2.2.1. Usando processos analíticos, mostre que, tal como a figura sugere, h é contínua no ponto 0.

2.2.2. Recorrendo à calculadora, determine o comprimento do segmento $[AB]$. Explique como procedeu, apresentando o resultado arredondado às centésimas. Sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

Testes de Matemática A do 12.º ano: enunciados e resoluções (2008/2009)

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por .

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, mostre que $f''(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2}$ e justifique que o gráfico de f tem apenas um ponto de inflexão.

4. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, considere

$z_1 =$ e $z_2 =$.

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

4.1. Calcule a e b de modo que $a\,i + 2b - b\,i^{37}$ seja igual a z_1.

4.2. Escreva na forma trigonométrica o complexo $\frac{z_2}{z_1}$.

4.3. Seja $z_3 = 40\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Mostre que $z_2 - z_3$ é um imaginário puro.

1. *"Sobrecarregados com sacrifícios e dificuldades, os povos coloniais efectuaram a pulso a escalada da emancipação. Amordaçados, jamais dispuseram de condições para transpor a barreira das probabilidades."*
OS DIAS DO FIM, Ricardo de Saavedra

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$	a

(a representa um número positivo inferior a 1).

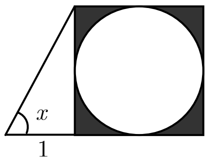
Qual é o valor de a?

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 2

3. Na figura junta está representada uma circunferência inscrita num quadrado. O lado desse quadrado é igual à altura de um triângulo de base igual a uma unidade.

Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada em função de x?



5. De um número complexo z, sabe-se que a sua imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.
Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica do complexo z^2?

(A) O ponto A **(B)** O ponto B
(C) O ponto C **(D)** O ponto D

2. Considere a função g, de domínio $[0, \pi]$, definida por.

2.1. Mostre que $g''(x) = 4\cos(2x)$ e, sem recorrer à calculadora, indique as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g.

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por .

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

4. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, considere

$z_1 =$ e $z_2 =$.

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

4.2. Escreva na forma algébrica o complexo $\frac{z_2}{z_1}$ e mostre que ele é solução da equação $z^2 - 2z = 8 + 40\,i$.

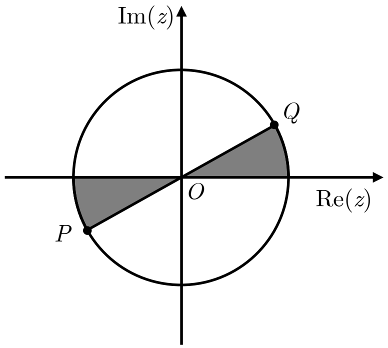
4.3. Sejam A e B as imagens algébricas, respectivamente, de z_1 e do seu conjugado, $\overline{z}_1$.

Esboce, no plano complexo, o triângulo $[ABO]$ e determine o seu perímetro (O é a origem do referencial).

1. *"As luvas estão na posição clássica, prontas (…) e a circunferência de cada uma delas é maior do que a do seu rosto."*

A MANCHA HUMANA, Philip Roth

No plano complexo da figura junta, está representada uma circunferência centrada na origem.



Sabe-se que:

1.1. Mostre que $-w = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$.

1.2. Calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas de w , simplificando o mais possível as expressões obtidas.

1.3. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, incluindo a fronteira.

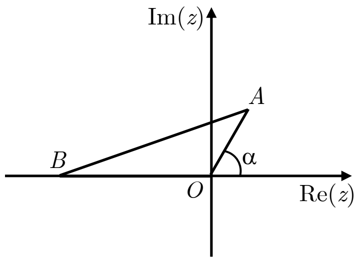
2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w =$.

2.1. Determine $\frac{w+\left(\text{cis}\,\frac{3\pi}{8}\right)^4}{2+i}$ apresentando o resultado final na forma algébrica.

2.2. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, por:

$$\left|z+w\right| = 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -2$$

3. Considere, no plano complexo, o triângulo $[AOB]$:



Sabe-se que:

Calcule a área do triângulo $[AOB]$.

Percorra os seguintes passos:

- Determine o comprimento do segmento $[BO]$ (base do triângulo);
- Considere um ponto no semieixo real positivo e escreva a expressão da altura do triângulo em função de α ;
- Mostre que a área do triângulo $[AOB]$ é dada, em função de α , por $2\,\text{sen}\,\alpha$;
- Determine o valor de α ;
- Calcule a área pedida.

4. São dados os seguintes números complexos:

$$z_A = 2\ \text{cis}\,\frac{4\pi}{9} \quad \text{e} \quad z_B = 2\ \text{cis}\,\frac{7\pi}{9}$$

Sabendo que z_A e z_B são raízes **consecutivas** de índice n de um número complexo z :

4.1. Justifique que $n = 6$;

4.2. Determine, na forma algébrica, este número z .

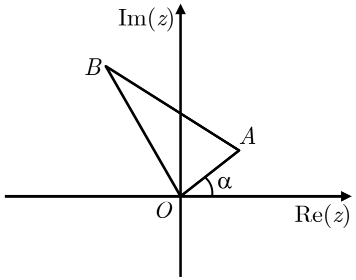
2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w =$.

2.1. Determine $\dfrac{w - \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{10}\right)^5}{1+2i}$ apresentando o resultado final na forma algébrica.

2.2. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, por:

$$\left|z+w\right| = 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq -1$$

3. Considere, no plano complexo, o triângulo $[AOB]$:



Sabe-se que:

3.1. Mostre que a área do triângulo $[AOB]$ é dada, em função de α , pela função definida por $f(\alpha) = 2\operatorname{sen}(2\alpha)$.

Percorra os seguintes passos:

- Determine o comprimento do segmento $[BO]$ (base do triângulo);
- Considere um ponto no segmento $[BO]$ e escreva a expressão da altura do triângulo em função de α ;
- Determine a área pedida.

3.2. Suponha que a área do triângulo $[AOB]$ é igual a $\sqrt{3}$.

Determine z^{10} na forma algébrica.

4. “*O símbolo arquitectónico da universidade, o relógio da torre hexagonal de North Hall* (…)”
A MANCHA HUMANA, Philip Roth

São dados os seguintes números complexos:

$$z_A = 2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{9} \quad \text{e} \quad z_B = 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{9}$$

Sabe-se que z_A e z_B são raízes **consecutivas** de índice n de um certo número complexo. O que representam, geometricamente, todas as imagens geométricas das raízes desse número complexo? Justifique.