

Resumo do 5.º e 6.º testes de Matemática A

12.º 2 e 5

1. “(...) e agora ali estavam eles sentados nos seus magníficos lugares à sombra, contemplando a Maestranza a encher-se de uma multidão que, mesmo assim, seria apenas uma terça parte dos que tinham içado lá fora e que aparentemente se iriam contentar em seguir a corrida [de touros] através das reacções que vinham lá de dentro (...)”

O RIO DAS FLORES, Miguel Sousa Tavares

Dos frequentadores de uma tourada, constatou-se que:

- Um terço são mulheres;
- 20 % dos homens preferem o toureiro A.

Escolhe-se, ao acaso, um dos frequentadores da tourada. Qual é a probabilidade de ele ser um homem que não prefere o toureiro A?

- (A) $\frac{8}{15}$ (B) $\frac{7}{15}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{1}{15}$

2. Uma associação de consumidores analisou uma amostra de 3300 ovos, sendo o seu peso considerado uma variável. Qual é o número aproximado de ovos analisados que pertencem à classe XL?

- (A) 1650 (B) 75
(C) 524 (D) 44

CLASSE DOS OVOS CONSOANTE O SEU PESO P EM GRAMAS

XL (Muito grande): $P \geq 73$
L (Grande): $63 \leq P < 73$
M (Médio): $53 \leq P < 63$
S (Pequeno): $P < 53$

3. A primeira derivada de uma função g , de domínio \mathbb{R} , é dada por Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de g ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. Sejam f a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ e a sucessão de termo geral

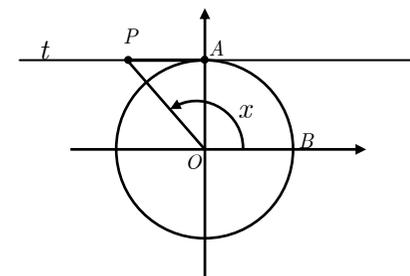
Indique o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)$

- (A) $\frac{2}{\ln 3}$ (B) $\frac{1}{\ln 3}$ (C) $\frac{\ln 3}{2}$ (D) $\ln 3$

5. Qual é o domínio da função definida por ?

- (A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \right\}$
(B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \right\}$
(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$
(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6. Na figura junta, a recta t é tangente à circunferência no ponto A e o ponto B pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox .



Considere que um ponto P se desloca sobre a recta t e, para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo POB ($x \in]0, \pi[$).

Seja d a função que, a cada valor de x , faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A .

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função d' , primeira derivada da função d ?

- (A) (B)
(C) (D)

1. Suponha que a taxa de desemprego em Portugal, em percentagem, a partir dos últimos anos da década de noventa do século passado pode ser dada pelo seguinte modelo:

Tenha em atenção que:

- t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde à taxa de desemprego registada em 1998;
- O argumento da função seno vem em radianos.

- 1.1. Admita que a população activa, em Portugal e em 2006, era de 6,2 milhões de pessoas.

Segundo este modelo, qual foi, aproximadamente, o número de pessoas que estavam desempregadas em 2006? Apresente o valor em milhares, arredondado às décimas.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, uma casa decimal.

1.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize, na janela $[0, 10] \times [0, 10]$, o gráfico da função d e reproduza-o na sua folha de prova.

Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja d' a função derivada de d . O conjunto solução da inequação $d'(t) > 0$ é um intervalo aberto $]a, b[$. Determine os valores de a e de b . Apresente os resultados arredondados às unidades.

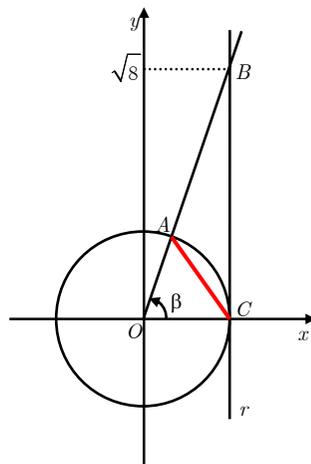
Justifique a sua resposta. **Interprete-a** no contexto do problema.

2. “Quando o touro ficou sozinho no centro da praça, castigo mas ativo, Juan Belmonte afastou-se das tábuas, deu uns passos em frente e, com um gesto circular da mão, dedicou o terceiro tércio, que se iria seguir, a toda a assistência.”

O RIO DAS FLORES, Miguel Sousa Tavares

Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy :

- o círculo trigonométrico;
- a recta r , de equação $x = 1$;
- o ponto A , intersecção da semi-recta $\hat{O}A$ com a fronteira do círculo trigonométrico;
- o ponto B , intersecção da recta OA com a recta r .
- o ângulo COA , de amplitude β .



Como a figura sugere, a ordenada de B é $\sqrt{8}$.

Mostre que $\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

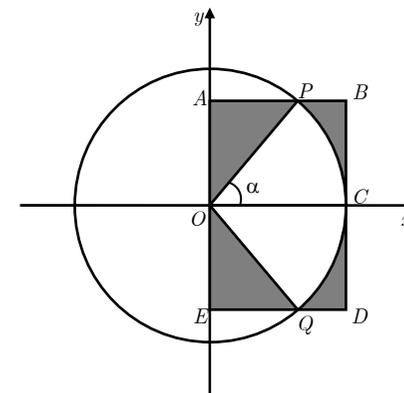
Sugestão: considere um ponto A_1 , projecção do ponto A no eixo Ox .

3. Na figura está representado o círculo trigonométrico e o rectângulo $[ABDE]$.

Considere que o ponto P se desloca sobre a circunferência mas apenas no primeiro quadrante.

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P no quarto quadrante de tal forma que se tem sempre $\overline{AO} = \overline{OE}$; O ponto C tem de coordenadas $(1, 0)$.

Para cada posição do ponto P , seja α a amplitude, em radianos, do ângulo POC ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).



3.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α , por

3.2. **Sem usar a calculadora**, determine a área máxima dessa região sombreada.

3.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de α para os quais a área da região sombreada é igual um sexto da área do círculo trigonométrico?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente os resultados na forma de dízima, arredondados às centésimas.

3.4. Estude, quanto à existência de assintotas, a função f definida em $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{por } f(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{\alpha^2}$$

4. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por Considere as seguintes afirmações:

- g é contínua no ponto de abcissa 1.
- g apenas é contínua à esquerda do ponto de abcissa 1.
- g apenas é contínua à direita do ponto de abcissa 1.

Apenas uma das afirmações anteriores é verdadeira. Utilizando apenas métodos analíticos, indique-a, justificando convenientemente a resposta.

1. Numa certa experiência aleatória, há apenas quatro acontecimentos elementares, sendo todos equiprováveis.
Sabe-se que:
- a variável discreta associada a esta experiência toma os valores $a, b, c, e d$;
 - o valor médio da variável é igual a 5.
- Qual é a expressão que dá o desvio padrão dessa variável?

2. “(...) aventurara-se ao estatuto de primeiro importador de legítimo peixe do mar em Estremoz, terra em que pelo menos uns dois terços dos habitantes não faziam ideia do que era o mar e onde ficava.”
O RIO DAS FLORES, Miguel Sousa Tavares

O Porfírio veio de uma pescaria com doze peixes, sendo dois terços budiões. Ele vai arrumar os peixes na sua arca frigorífica.
Qual é a probabilidade de, entre os primeiros três que ele arrumar, pelo menos dois serem budiões?

4. Na figura ao lado está parte do gráfico da função g' , primeira derivada de uma função g , de domínio \mathbb{R} .
De acordo com este gráfico, quantos mínimos relativos tem a função g ?

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

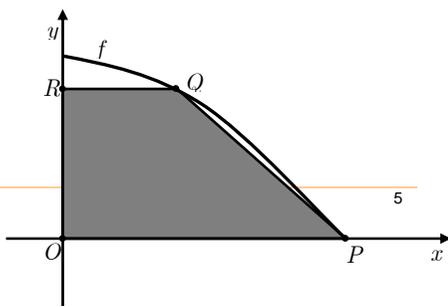
2. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por

2.1. Calcule o valor exacto de $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

2.2. Usando a definição de derivada num ponto, calcule $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- 2.3. Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy , o gráfico da função f e o trapézio $[OPQR]$.

- O é a origem do referencial;
- P é um ponto que pertence ao gráfico de f e ao eixo das abcissas;



- Q é um ponto do gráfico de f ;
- R pertence ao eixo das ordenadas.

O ponto Q desloca-se ao longo do gráfico de f de modo que as rectas OP e RQ são sempre paralelas. Exprima a área do trapézio $[OPQR]$ em função da abcissa de Q , e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de Q (aproximada às centésimas) para a qual a área do trapézio é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

- o gráfico obtido;
- o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, sem utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

4.1. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{2 \ln x}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Considere as seguintes afirmações:

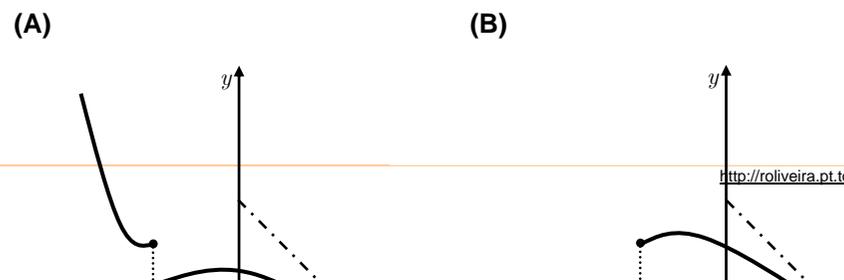
- g é contínua no ponto de abcissa 1.
- g apenas é contínua à esquerda do ponto de abcissa 1.
- g apenas é contínua à direita do ponto de abcissa 1.

Apenas uma das afirmações anteriores é verdadeira. Indique-a, justificando convenientemente a resposta.

- 4.2. Verifique que $f''(x) = e^x(x^2 + 4x)$ e estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

1. Considere uma função g , de domínio \mathbb{R} , tal que:

Qual dos seguintes pode representar o gráfico de g ?



Relativamente ao gráfico da função h , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $] - 1, 3]$.
- (B) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $]3, +\infty[$.
- (C) O ponto de abscissa 0 é um ponto de inflexão.
- (D) O ponto de abscissa 3 é um ponto de inflexão.

5. “Havia ainda a probabilidade de as autoridades o considerarem culpado de convivência no crime.”
A SANGUE FRIO, Truman Capote

Várias pessoas vão ser julgadas num tribunal. Considere os acontecimentos A e B :

A – «a pessoa é do sexo masculino»;

B – «a pessoa é culpada».

Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa que vai ser julgada.

Sabe-se que $P(A) = 0,7$ e que $P(A \cap B) = 0,3$.

Qual é o valor de ?

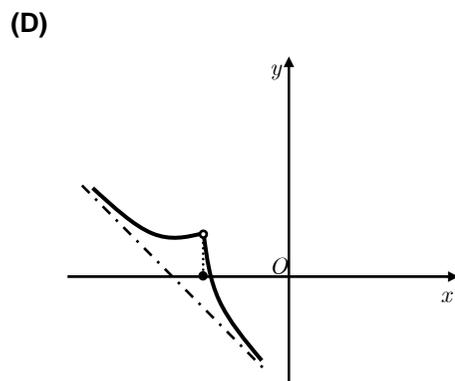
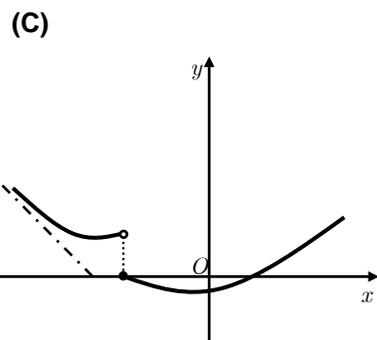
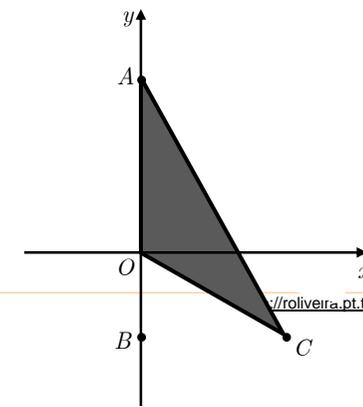
- (A) $\frac{4}{7}$
- (B) $\frac{5}{8}$
- (C) $\frac{2}{9}$
- (D) $\frac{3}{10}$

6. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, a bissectriz dos quadrantes ímpares?

1. “Até mesmo para Jolene, uma rapariguinha tão infantil, o rosto ascético e triangular de Mrs. Clutter, o seu ar a um tempo caseiro e angelical, despertavam um instinto de compaixão protectora.”
A SANGUE FRIO, Truman Capote

No plano complexo da figura, considere o triângulo isósceles $[ACO]$.

Tal como a figura sugere:



2. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função cúbica f .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$?

- (A) $+\infty$
- (B) $-\infty$
- (C) 0
- (D) 1

3. De uma função f , derivável em \mathbb{R}^+ , sabe-se que:

- o seu contradomínio é igual a $[0, 4]$;
- 1 é um minimizante e 3 é um maximizante;
- t é a recta tangente ao gráfico de f nos pontos de abscissa 1 e 3.

Qual das seguintes pode representar uma equação de t ?

4. Seja h uma função de domínio $] - 1, +\infty[$. Sabe-se que a Segunda Derivada de h , também de domínio $] - 1, +\infty[$, está definida por

- A pertence ao semi-eixo positivo Oy e é a imagem geométrica de um número complexo z ;
- B pertence ao semi-eixo negativo Oy e é a imagem geométrica de um número complexo de módulo igual a metade de $|z|$;
- C pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um número complexo w de módulo igual a $|z|$;
- BC é uma recta paralela ao eixo Ox .

1.1. Suponha que, nesta alínea, $w =$
Sem usar a calculadora, calcule na forma trigonométrica, o produto entre o simétrico de w e o conjugado de w .

1.2. Sabendo que a área do triângulo $[ACO]$ é igual a $\frac{1}{2}$, escreva, na forma algébrica, z .

2. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $w = 2 - 2i$.

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

2.1. Calcule a e b de modo que se tenha

2.2. Mostre que é um imaginário puro o número

2.3. Calcule, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas do número complexo w , simplificando o mais possível as expressões obtidas.

3. Na figura está representado o quadrilátero $[ABCD]$. Sabe-se que:

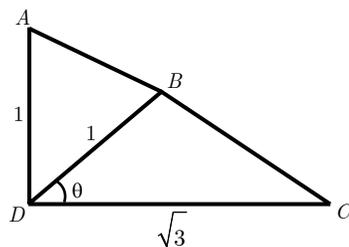
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo

$$\angle BDC \left(\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right);$$

- $[AD] \perp [DC]$;

$$\overline{AD} = \overline{BD} = 1 ;$$

$$\overline{CD} = \sqrt{3} .$$



3.1. Mostre que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada, em função de θ , pela função definida por $f(\theta) = \text{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- escreva uma expressão, em função de θ , para a área do triângulo $[BCD]$;
- identifique, no triângulo $[ABD]$, a amplitude θ ;
- escreva uma expressão, em função de θ , para a área do triângulo $[ABD]$;
- mostre que $f(\theta)$ é a área pedida.

3.2. **Sem usar a calculadora**, determine o valor de θ para o qual é máxima a área do quadrilátero $[ABCD]$.

4. Sobre o número de aves, em milhares, numa reserva natural, t anos após o início de 1980, constatou-se o seguinte:

- No início de 1980 havia, pelo menos, 3 mil aves;
- Nunca chegou a haver menos de duas mil aves durante mais de um ano;
- A reserva não pode comportar mais de 12 mil aves.

Para tentar arranjar um modelo matemático simples que desse o número de aves nessa reserva, t anos após o início de 1980, chegou-se à seguinte função:

$$N(t) = 10 \cos \left(\frac{\pi}{12} t \right) + 7, \quad t \geq 0$$

(o argumento da função co-seno está expresso em radianos).

Tendo em conta as três características anteriores, será este modelo matemático adequado?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, explicitie as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).