Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

Resumo do 5.º e 6.º testes de Matemática A

12.º 2

1. Os quatro apresentadores do programa humorístico «*Diz que é uma espécie de magazine*» vão iniciar mais um programa, sentando-se, ao acaso, lado a lado.
Qual é a probabilidade de o elemento mais alto dos apresentadores ficar num dos extremos?

2. Um dado **viciado**, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado algumas vezes. Sabe-se que a probabilidade de sair um número par é igual a 80%.

Seja X a variável aleatória que designa o «número de vezes que, nesses lançamentos, sai face par». A distribuição de probabilidades da variável X é

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = 0{,}282$ e $b = 0{,}198$ **(B)** $a = 0{,}198$ e $b = 0{,}282$

(C) $a = 0{,}384$ e $b = 0{,}096$ **(D)** $a = 0{,}096$ e $b = 0{,}384$

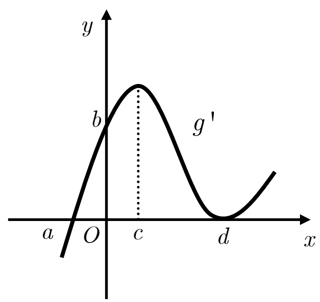
3. Considere uma certa função f de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que $y = x + 3$ é a equação de uma recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

4. Na figura ao lado está parte do gráfico da função g', **primeira derivada** de g, de domínio $\mathbb{R}$. Tal como a figura sugere, a e d são zeros de g', $g'(0) = b$ e c e d são extremantes de g'.

Relativamente ao gráfico da **função** g, quais são as abcissas dos seus pontos de inflexão?



5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h, periódica e derivável.

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

(A) $h(x+\pi) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(B) $h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(C) $h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

(D) $h''\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0$

6. Dado $x \in \mathbb{R}$, a que é igual $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$?

1. De uma certa função f, de domínio $]-2, +\infty[$, sabe-se que a que sua **derivada**, está definida por

1.1. Sabendo que $e-2$ é um zero de f, escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $e-2$.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

2. *"Apontou para um balcão, premiu um botão e ergueu-se do tampo um minúsculo frigorífico circular! "*
AMY E OS GANSOS BRAVOS, Patricia Hermes

Os economistas de uma empresa de venda de pequenos frigoríficos concluíram que o número de unidades vendidas num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público (situado entre os 100 e os 300 euros), de acordo com a função ,

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de um frigorífico e $V(x)$ o número aproximado de frigoríficos vendidos num mês, $100 \le x \le 300$.

2.1. A empresa tem um conjunto de despesas (compra de matéria-prima, ordenados dos trabalhadores, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda dos frigoríficos.
Sabendo que cada frigorífico vendido acarreta à empresa uma despesa total de 110 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda dos frigoríficos, é dado por

$$L(x) = (6x - 660)e^{4-0,01x}$$

2.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos) mostre que há um preço de venda de tal modo que a empresa lucra 2000 euros.

2.3. Usando processos exclusivamente analíticos, determine o preço que optimiza os lucros da empresa.

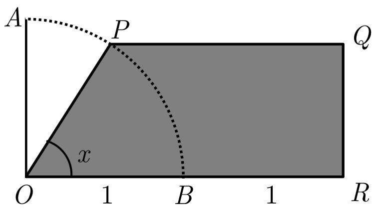
3. *"Olhavam para a escuridão, contemplando o quadrilátero de luz que a cozinha iluminada projectava na noite (...)"*

AS VINHAS DA IRA, John Steinbeck

Na figura está representado a sombreado o quadrilátero $[OPQR]$.

Tem-se que:

- $\overline{OB} = \overline{BR} = 1$
- AB é um arco de circunferência de centro em O
- o ponto P move-se ao longo desse arco de tal forma que se tem sempre $PQ // OR$



- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo POB, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

3.1. Mostre que a área do quadrilátero $[OPQR]$ é dada, em função de x, por

3.2. Suponha que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{5}$. **Sem recorrer à calculadora**, determine $g(x)$.

3.3. Calcule $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

3.4. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de x para o qual a área do quadrilátero $[OPQR]$ é igual à área do quarto de círculo $[AOB]$?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s).
Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

4. A função h está definida por , $k \neq 0$

Prove, aplicando a **definição de derivada**, que $h'(0) = k$

1. *"A fenda parecia mais acidentada do que esperavam. As suas paredes elevavam-se quase na perpendicular e tinha cerca de dez metros de largura."*

SOLIDÃO NO GELO, David Howarth

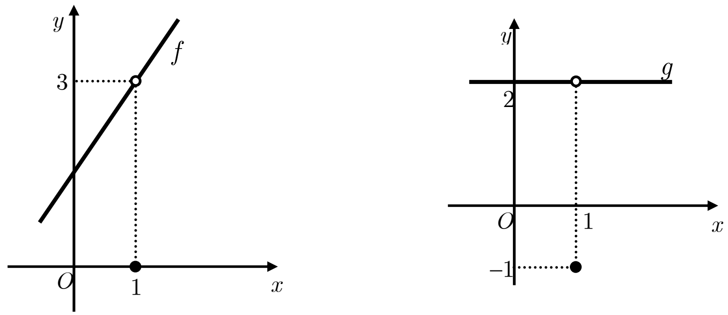
Admita que a variável altura, em metros, das fendas encontradas por montanhistas numa certa região, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 10. Sabe-se 20% de todas as fendas têm uma altura superior a 15 metros.
Escolhida uma dessas fendas ao acaso, qual pode ser a probabilidade de a sua altura ser inferior a 6 metros?

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

Qual das seguintes expressões pode também definir f?

(A) $\frac{x + \ln 5}{2}$ **(B)** $\frac{x + 5}{2}$ **(C)** $x + \ln 5$ **(D)** $x + 5$

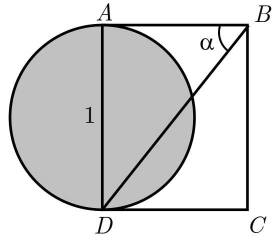
3. Nas figuras a seguir estão representados os gráficos da funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$ e descontínuas no ponto de abcissa 1.



É contínua para $x = 1$ a função:

4. Na figura estão representados um rectângulo $[ABCD]$ e um círculo de diâmetro $[AD]$.
Tal como a figura sugere:

- α é a amplitude do ângulo ABD;
- o diâmetro do círculo mede uma unidade.



Pretende-se determinar o valor de α para que a área do rectângulo seja igual à área do círculo.

Qual das equações seguintes traduz este problema?

5. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, uma recta paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares?

6. Na figura está representado, no plano complexo, um octógono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Sabe-se que:

- Os pontos A e B pertencem a esse octógono;
- O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $cis\,\frac{3\pi}{10}$;

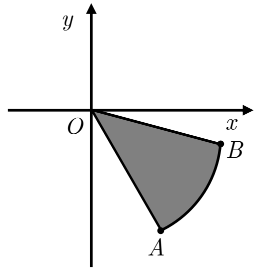
Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice B ?

(A) $cis\,\frac{21\pi}{20}$ **(B)** $cis\,\frac{20\pi}{19}$

(C) $cis\,\frac{11\pi}{10}$ **(D)** $cis\,\frac{10\pi}{9}$

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

Em relação ao plano complexo da figura, sabe-se que:



- $\overset{\frown}{AB}$ é o arco de uma circunferência de centro na origem do referencial;
- O ponto A é a imagem geométrica de z_1;
- O ponto B é a imagem geométrica de z_3.

1.1. Considere o número complexo $\left(\frac{z_1 + \sqrt{3}\ i}{i}\right)^{27}$.

Sem recorrer à calculadora, escreva-o na forma algébrica.

1.2. Justifique que $\left(z_2\right)^{12}$ é um número real.

1.3. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, incluindo a fronteira.

2. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, o número

2.1. É dada, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 = \overline{w} - 10\sqrt{3}$.

Calcule a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da equação anterior.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Mostre que* $z^4 = 16cis\,\frac{7\pi}{6}$.
- *Resolva a equação dada, apresentando as soluções o mais simplificadamente possível.*
- *Esboce, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da equação dada.*
- *Calcule a área pedida.*

2.2. Seja α um argumento do número complexo w e seja z um número imaginário puro tal que $Im(z) > 0$.
Escreva, na forma trigonométrica, o produto do simétrico de w por z.

3. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo de seis minutos da experiência, de acordo com a função

onde t designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do minuto 1 até ao minuto 7, e $v(t)$ designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em **centenas** de rotações por minuto).

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, ao longo desses seis minutos da experiência.
Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto, arredondado às décimas.

3.2. Durante essa experiência, foi também possível concluir que o consumo de combustível do motor está relacionado, aproximadamente, com a função

$$c(t) = 5\,\mathrm{sen}(0,785t - 0,5) + \sqrt{3}\ t - 1,04\ ,\quad 1 \leq t \leq 7$$

em que $c(t)$ é o consumo de combustível do motor, em litros por 100 km, após t minutos.

3.2.1. Calcule o consumo de combustível do motor após 90 segundos.
Apresente o resultado em litros por 100 km, arredondado às décimas.

3.2.2. Suponha que, num dado momento, o consumo de combustível do motor é igual 4 a litros por 100 km. Qual é a velocidade de rotação do seu eixo?
Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, duas casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

Testes de Matemática A do 12.º ano: enunciados e resoluções (2006/2007)

4. O Ezequias descarrega pequenos programas (gratuitamente) da Internet mas não gosta muito da velocidade de *download*. Cada um desses programas demora 1 minuto a ser descarregado.
Ele estima que, durante esse minuto, o número de KB por segundo é dado aproximadamente por

(o argumento da função seno está expresso em radianos e a variável t está em segundos).

O Ezequias quer mudar de servidor de Internet mas ele só o fará se não se verificar nenhuma das seguintes três condições:

- Inicialmente, a velocidade de *download* tem de ser maior que 100 KB por segundo;
- A velocidade máxima de *download* tem de ser superior a 80 KB por segundo;
- A velocidade de *download* tem de ser superior a 65 KB por segundo durante, pelo menos, 10 segundos.

Irá o Ezequias mudar de servidor?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).