Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

Resumo do 5.º e 6.º testes de Matemática A

12.º 1, 3 e 7

1. Numa certa linha do triângulo de Pascal, a soma dos dois últimos elementos é 16.
Então, o produto do quarto pelo quinto elementos da linha **anterior** é:

2. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes.
Seja X a variável aleatória que designa o «*número de vezes que, nesses dois lançamentos, sai face par*». A distribuição de probabilidades da variável X está representada ao lado.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$ **(B)** $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{4}$

(C) $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$ **(D)** $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

3. "*- Agora, pense: nunca ninguém tocou nesse dinheiro e o depósito foi feito há quase cem anos e desde então tem acumulado juros.*"

O COMEDOR DE PÉROLAS, João Aguiar

A relação entre uma quantia inicial Q_0 depositada num banco e a quantia acumulada Q após n anos é dada pela expressão $\frac{Q}{Q_0} = 1,07^n$.
Qual é o valor (aproximado) de n de modo que a quantia acumulada seja 1000 vezes superior à quantia inicial?

(A) 103 **(B)** 102 **(C)** 101 **(D)** 100

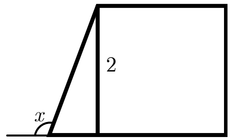
4. De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
Qual, das seguintes representações gráficas a seguir, pode ser a da função f ?

5. Para um certo valor de k, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função g definida por.

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 0 **(C)** -1 **(D)** -2

6. Na figura está representado um polígono constituído por um triângulo rectângulo e um quadrado, ambos de altura 2.
Seja A a função que dá a área do polígono em função de x.
Qual das expressões seguintes pode ser a de A ?



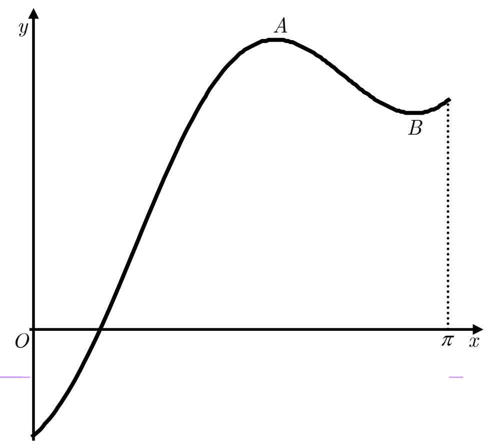
1. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $f(e) = \frac{4}{3}$ e a que sua **derivada**, também de domínio $\mathbb{R}^+$, está definida por

1.1. Sem recorrer à calculadora, escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes **pares**. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.
Explique como procedeu.

2. O gráfico que se reproduz ao lado em referencial o.n. é da função definida por ,
em que $x \in [0,\pi]$.
A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de g.



2.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

2.1.1. Prove que $g(x) =$

2.1.2. Mostre que a abcissa do ponto A é $\frac{7\pi}{12}$ e calcule a abcissa do ponto B.

2.1.3. Determine o contradomínio de g.

2.2. Recorrendo à calculadora, resolva a inequação $g(x) \geq x$, no intervalo $[0,\pi]$.
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).
Nos cálculos intermédios, use duas casas decimais.

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x\right] = 0$.

Seja h a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por

Prove que a recta de equação $y = 2$ é assimptota do gráfico de h.

4. "*A sala insonorizada do* [*submarino*] Charlotte – *concebida a partir de uma estrutura similar nos Bell Laboratories – era aquilo que formalmente se designa como câmara sem ecos. Sendo uma sala com isolamento acústico, sem superfícies paralelas ou reflectoras, absorvia o som com uma eficácia de 99,4 por cento.*"
A CONSPIRAÇÃO, Dan Brown

Um submarino percorre o oceano, fazendo um teste de velocidade. Inicialmente a uma velocidade de 10 nós, o submarino aumenta a velocidade, vindo depois a baixar e, após cerca de 3 horas, voltar de novo a aumentar a velocidade, mas nunca ultrapassando os 25 nós.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função V que dá a velocidade aproximada do submarino após t horas.

(A) **(B)**

(C) **(D)**

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões (**apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada**).
Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s)**.

1. "*- Eu vou à pesca porque a pesca é uma actividade cheia de probabilidades, só que, para estabelecer essa rede de probabilidades, precisamos de ter uma variante qualquer. E uma regra que valha para a maior parte do tempo. Estou ali um dia inteiro, o peixe vem ou não vem, esconde-se numa curva ou suicida-se num anzol.*"
UM CRIME NA EXPOSIÇÃO, Francisco José Viegas

Geralmente, dois em cada cinco peixes que o Eustáquio pesca no rio são salmões. Se ele ao fim do dia chegar a casa com vinte peixes, a probabilidade de **metade** serem salmões é, aproximadamente, igual a:

2. De uma escola, sabe-se que:

- 40% dos alunos são do sexo masculino;
- 30% dos alunos gostam de ler poesia;
- 15% das meninas gostam de ler poesia.

Ao seleccionar aleatoriamente um aluno dessa escola, qual é a probabilidade de ele ser um rapaz e não gostar de ler poesia?

(A) 19% **(B)** 21% **(C)** 28% **(D)** 55%

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) =$

Relativamente à continuidade da função f no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua à direita e descontínua à esquerda

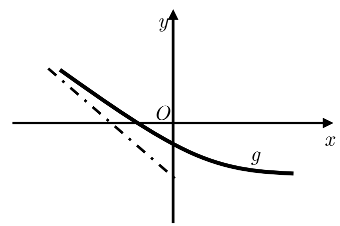
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita

(C) É contínua à esquerda e à direita

(D) É descontínua à direita e à esquerda

4. Na figura ao lado estão representados o gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, e a sua única assimptota.

Quanto ao valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}$



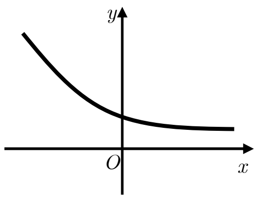
(A) Não existe **(B)** Ele é igual a $+\infty$

(C) Ele é igual a -1 **(D)** Ele é igual a 0

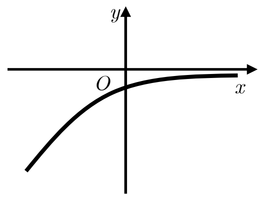
5. De uma função h, **estritamente decrescente** em $\mathbb{R}$, sabe-se que $h''(x) =$

Qual, das seguintes representações gráficas a seguir, pode ser a da **segunda derivada de h** ?

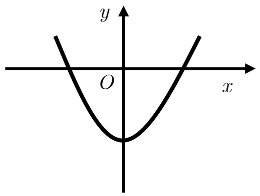
(A)



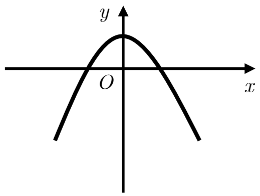
(B)



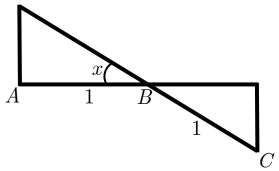
(C)



(D)



6. Considere os dois triângulos semelhantes da figura ao lado. Sendo $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$, qual, das expressões seguintes, dá a soma da área dos dois triângulos em função de x ?



(A)

(B)

(C)

(D)

1. De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, sabe-se que a sua **derivada**, também de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, está definida por $f'(x) =$

1.1. Sabe-se que os gráficos da função f e de $y = x^2$ admitem, num mesmo ponto, a mesma recta tangente. **Sem recorrer à calculadora**, determine a abcissa desse ponto.

1.2. Sem recorrer à calculadora, estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

1.3. Sobre a função g e a sua **derivada**, ambas de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, sabe-se que g possui apenas um extremo relativo e que $g'(x) = f'(x) + 1$.
Recorrendo à sua calculadora, indique a natureza desse extremo e determine um valor arredondado às centésimas para a sua abcissa.
Explique como procedeu.

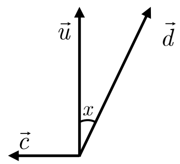
2. **2.1.** Seja g a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, dada por $g(x) =$
Sem usar a calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1.1. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-10}{x}$.

2.1.2. Mostre que g tem um mínimo.

2.2. *"Logo a seguir à ponte da baía, Kelly desligou o piloto automático e virou dez graus para bombordo."*
SEM REMORSOS, Tom Clancy

Considere a figura ao lado em que o vector $\vec{u}$ representa a direcção a seguir por um certo barco, o vector $\vec{d}$ representa a direcção que o barco **deve** seguir para vencer a corrente (vector $\vec{c}$ perpendicular a $\vec{u}$) e x é a amplitude do ângulo entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{d}$.



Admita que a função g relaciona a profundidade, em metros, do local onde se encontra esse barco em função de x.

2.2.1. Qual é a profundidade do local onde se encontra o barco, se a velocidade da corrente for nula?

2.2.2. Num certo momento, o capitão do barco calcula que o comprimento do vector $\vec{u}$ é igual a $\sqrt{3}$ e o de $\vec{c}$ é igual a 1. Determine a profundidade nesse local.
Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.

2.2.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:
Qual deve ser, em radianos e a menos de 0,01, o valor de x de modo que o barco esteja a navegar numa zona onde a profundidade é igual a 10,5 metros?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como abcissas relevantes de algum ponto (arredondadas às milésimas).

3. A função h está definida por $h(x) =$

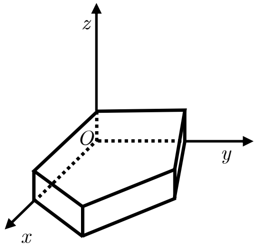
Considere $\alpha \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

Prove que, se $tg(\pi - \alpha) = \sqrt{2}$, então α é um zero de h.

1. "*Francesca não parava de limpar os olhos, tentando ver, o sol formando prismas estranhos com as lágrimas.*"

AS PONTES DE MADISON COUNTY, Robert James Waller

Na figura ao lado está um prisma pentagonal irregular recto.
Ao escolher dois vértices ao acaso, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo Oz?



(A) **(B)**
(C) **(D)**

2. De uma função f, contínua no intervalo $[-3, 3]$, sabe-se que $f(-3) = 3$ e $f(3) = 6$. Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-3, 3]$

(B) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[-3, 3]$

(C) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[-3, 3]$

(D) A função f não tem zeros no intervalo $[-3, 3]$

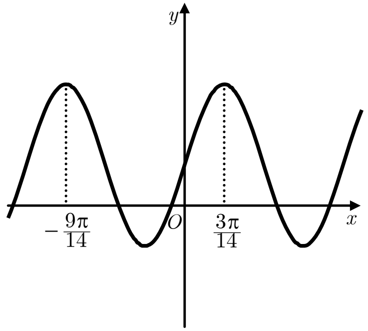
3. A função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, está representada ao lado. Como a figura sugere, o gráfico de g tem duas assimptotas, de equações $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$.
Assim, podemos concluir que:

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$ **(B)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = \frac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = -\infty$ **(D)** $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = \frac{1}{2}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?



(A) $\frac{3\pi}{14}$ **(B)** $\frac{9\pi}{14}$

(C) $\frac{6\pi}{7}$ **(D)** $\frac{12\pi}{7}$

5. Considere, no plano complexo, um ponto A, imagem geométrica de um certo número complexo z.
Sabe-se que A pertence ao terceiro quadrante.
Considere também o ponto B, imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ e o ponto C, imagem geométrica do número complexo $-z$.
Qual é a proposição **falsa**?

(A)

(B)

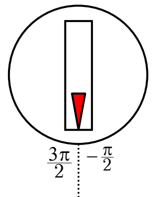
(C)

(D)

6. No conjunto dos números complexos, sejam w e $w\,i$ duas raízes consecutivas de índice n de um certo complexo z.
Qual é o valor de n?

1. A Egídia calcula que, consoante a posição do manípulo do seu esquentador, consegue obter a **temperatura máxima possível** t (em graus Celsius) da água. Por dar ideias a um círculo trigonométrico, ela supôs que essa temperatura é dada por

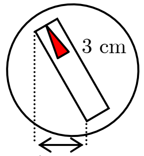
$t(x) =$



1.1. Sem usar a calculadora, mostre que t é decrescente.

1.2. A Egídia quer tomar um banho de imersão, com a água o mais quente possível. Determine a temperatura da água nessas condições.
Apresente o resultado em graus Celsius, arredondados às unidades.

1.3. Num certo momento, o manípulo do esquentador encontra-se na posição indicada pela figura ao lado.
Nas condições dessa figura, determine temperatura máxima possível da água, apresentando o resultado em graus Celsius, arredondados às unidades.



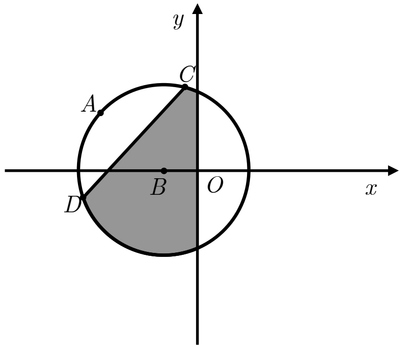
1.4. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual terá de ser, em radianos, a amplitude de x, para que a temperatura máxima possível seja igual a $50°\text{C}$?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos** obtido(s).
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

2. Em relação ao plano complexo da figura, sabe-se que:

- A circunferência está centrada no ponto $B(-1,0)$ e tem raio igual a ;
- Os pontos A, C e D pertencem à circunferência;
- A recta CD é a mediatriz do segmento $[AB]$;
- A é a imagem geométrica de $w_1 =$
- B é a imagem geométrica de w_2 .



2.1. Justifique que as coordenadas de A são

2.2. Sem usar a calculadora, determine o número $\frac{w_2}{1-i^{45}}$ na forma trigonométrica.

2.3. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = \overline{w_1}$.

2.4. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a zona sombreada da figura.

3. Seja z um complexo cuja imagem geométrica está situada no primeiro quadrante.
Sabendo que $Arg\left(z^4\right) =$, prove que z^3 é um número real negativo.

1. *"Ensei Tankado tinha construído a sua carreira com base nos números primos. Os números primos eram elementos fundamentais de todos os algoritmos de cifragem – eram valores únicos apenas divisíveis por si próprios e pela unidade. Os números primos funcionavam bem na escrita de códigos porque os computadores não conseguiam calculá-los usando o sistema típico de decomposição.(…) Entre zero e um milhão, havia mais de setenta mil* [*números primos*]"

FORTALEZA DIGITAL, Dan Brown

Para abrir um certo cofre, é necessário um código de seis caracteres (em que se podem usar 23 letras e 10 algarismos).
Alguém vai abrir o cofre, **sabendo** que apenas os dois últimos caracteres são números primos e diferentes. Qual é a probabilidade de acertar à primeira tentativa?

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e tal que a sua **derivada** está definida por $f'(x) =$
Qual é a proposição verdadeira?

(A) f tem um ponto de inflexão para $x = e$

(B) f tem um máximo relativo para $x = 1$

(C) f é decrescente em $[1, +\infty[$

(D) f é decrescente em $]0, 1]$

3. Qual é o conjunto-solução, em $[0, 2\pi]$, da equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$?

(A) $\left\{\frac{\pi}{5}\right\}$ **(B)** $\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$ **(C)** $\left\{\frac{9\pi}{5}\right\}$ **(D)** $\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

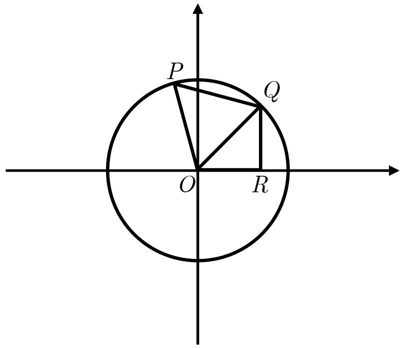
4. O gráfico da função g, representado ao lado, admite duas assimptotas, uma horizontal e outra oblíqua.
Qual é o valor de $\lim_{x \to -\infty} g(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$?

(A) 0 **(B)** $+\infty$

(C) 1 **(D)** $-\infty$

5. Na figura estão representados, no plano complexo:

- Uma circunferência centrada na origem e de raio 1;
- O triângulo **equilátero** $[OPQ]$;
- O triângulo **isósceles** $[OQR]$, rectângulo em R .

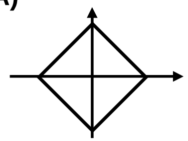


Seja w a imagem geométrica de

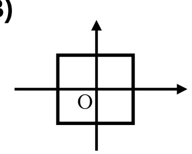
Qual dos números complexos seguintes representa w?

6. No conjunto $\mathbb{C}$, considere o número $z =$ a, em que $a > 0$. Dos quadrados a seguir representados, qual pode ter por vértices as imagens geométricas das raízes quartas de z ?

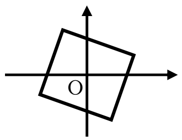
(A)



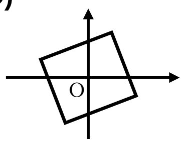
(B)



(C)



(D)

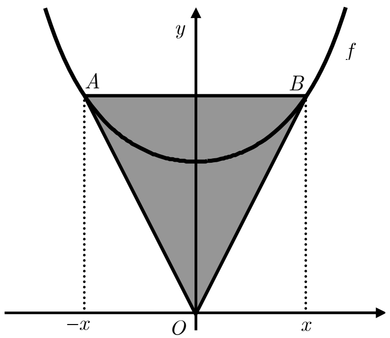


1. No referencial o.n. xOy ao lado estão a representação gráfica da função f, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) =$

e o triângulo isósceles $[ABO]$.

Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f.

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.



1.1. Determine as dimensões do triângulo $[ABO]$ se a função f intersectar a recta de equação $y = 2$ nos pontos A e B.

1.2. Mostre que a área do triângulo $[ABO]$ é dada, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pela função definida por $A(x) =$

1.3. Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 =$ e $z_2 =$

Sem usar a calculadora, resolva as quatro alíneas seguintes.

2.1. Determine o valor de $\frac{z_1}{i^{53}}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.2. Escreva o **simétrico** do número $\overline{z_2}$ na forma algébrica.

2.3. Justifique que z_2 é uma raiz sexta de 1.

Determine uma outra raiz sexta de 1, cuja imagem geométrica está no primeiro quadrante.

2.4. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$\left|z - \sqrt{3} - z_1\right| \leq 2 \quad \wedge \quad Re(z) \geq \left|z_2\right|$$

3. Sejam P a imagem geométrica de um complexo não nulo w e α um seu argumento.

Sabendo que $Arg\left(w^3\right) =$, prove que P pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

4. *"– O veado subia na vertical a cerca de um metro por segundo, tendo em conta a inclinação da encosta. A quinhentos metros, o tempo de voo de uma bala é um pouco inferior a três quartos de segundo, por conseguinte eu tinha de fazer pontaria a cerca de um metro à frente do ponto que queria atingir."*

SOMBRAS SOBRE A BABILÓNIA, David Mason

O Virgínio segue um veado há um certo tempo. Admita que a distância, em metros, do veado ao Virgínio é dada por

nos primeiros 60 **segundos**.

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos e a variável t está em segundos).

Nesses sessenta segundos, e de modo a que o Virgínio tenha hipóteses de dar um tiro no veado, ele sabe que:

- O veado tem de estar sempre a uma distância superior a 320 metros;
- O veado não pode estar a uma distância superior a 500 metros mais do que dez segundos;

Conseguirá o Virgínio apanhar o veado?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).