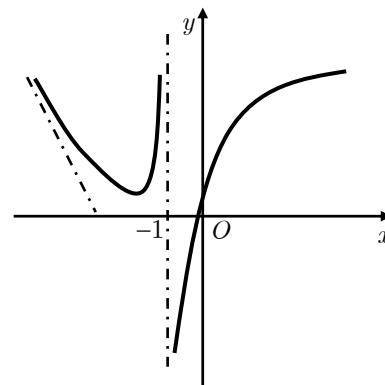




4. Na figura ao lado está parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , e com as suas únicas assíntotas:  $x = -1$  e  $y = -2x - 6$ .  
Das seguintes, qual é a proposição **falsa**?

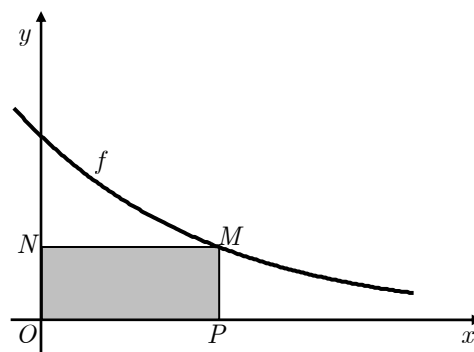


- (A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -2$                       (B)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$   
(C)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -2$                       (D)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$

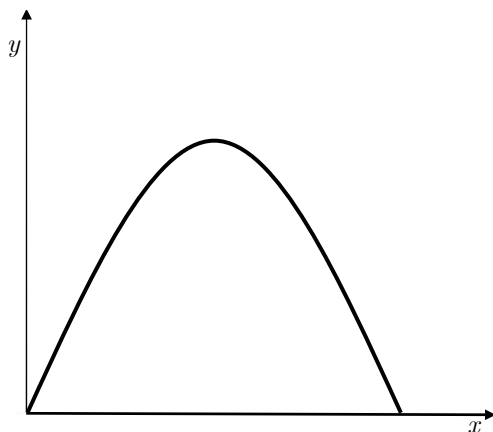
5. Na figura ao lado está desenhada parte da representação gráfica da função definida por  $f(x) = a^{-x}$ ,  $a > 1$ .

Seja  $M$  um ponto do gráfico de  $f$ , de abcissa **não negativa**, e seja  $g$  a área do rectângulo  $[MNOP]$ .

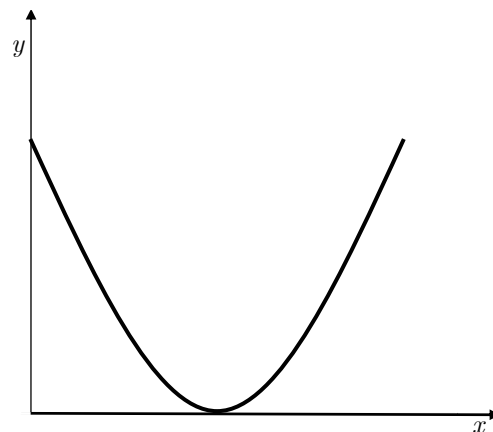
Qual dos seguintes pode ser, em função de  $x$ , o gráfico da função  $g$  ?



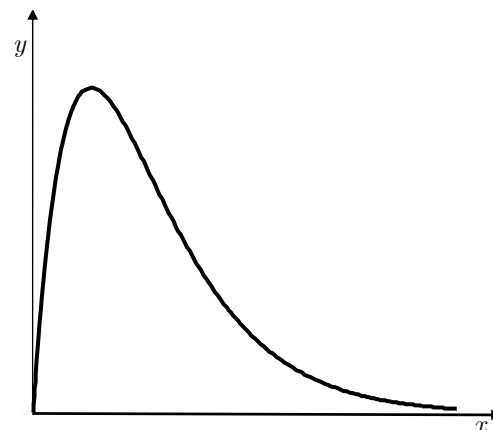
(A)



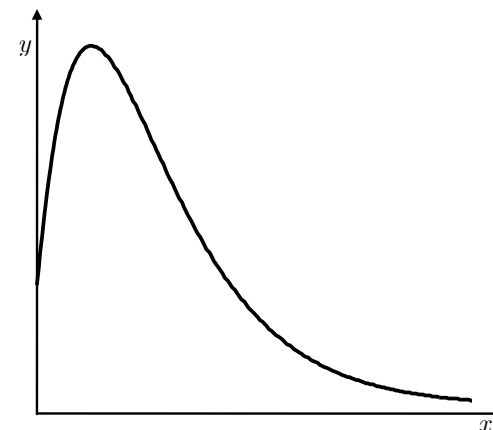
(B)



(C)

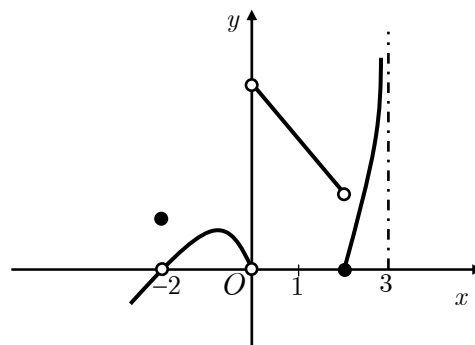


(D)



6. Na figura ao lado está parte de uma função  $h$ .  
Qual pode ser o conjunto das abcissas dos pontos de descontinuidade do gráfico de  $h$  ?

- (A)  $\{-2; 1; 2; 3\}$  (B)  $\{-2; 0; 2\}$   
(C)  $\{-2; 0; 2; 3\}$  (D)  $\{-2; 2\}$



### Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. “(...) os mais notáveis eram as raias, cuja cauda, muito fina, constitui quase a terça parte do corpo e se assemelham a grandes losangos com o comprimento de vinte e cinco pés.”

20.000 LÉGUAS SUBMARINAS, Jules Verne

Ao estudar uma população de raias, um grupo de cientistas constatou que o comprimento das raias seguia uma distribuição normal de valor médio 25 pés. Além disso, os cientistas sabem que 10% das raias têm um comprimento superior a 35 pés.

- 1.1. Comente a seguinte afirmação:  
“Em cada 10 raias na população estudada, há, em média, 3 com um comprimento entre 15 e 25 pés.”
- 1.2. Sabe-se que, num grupo de treze raias, onze assemelham-se a um losango. Escolhidos quatro raias ao acaso desse grupo, qual é a probabilidade de apenas uma delas não se assemelhar a um losango?

2. “Tanto Annie como Robert queriam outro filho, mas ela abortara espontaneamente quatro vezes, e da última vez estivera em perigo de vida. A cada perda, o sofrimento aumentara exponencialmente.”

O ENCANTADOR DE CAVALOS, Nicholas Evans

Num certo país, chegou-se à conclusão que o número médio de filhos por casal é dado, após os primeiros  $t$  anos, pela função definida por

$$N(t) = 5 - \ln(2t + 1).$$

O instante  $t = 0$  corresponde ao início de 1990.

- 2.1. Qual foi o número médio de filhos por casal no início de 2002?  
Apresente o resultado arredondado às décimas.
- 2.2. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, **determine**  $N'(0)$ .  
**Interprete** o resultado no contexto do problema.
- 2.3. Quando o número médio de filhos for igual a 1,4, é necessário tomar algumas medidas. Segundo este modelo, quando é que isso acontecerá? Use a calculadora para indicar o mês e o ano previstos.

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.  
Nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por 
$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2}}{x} & \text{se } x < 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ \frac{5x-x^3}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes.

- 3.1. Mostre que a função  $h$  é contínua à direita de  $0$  e descontínua à esquerda de  $0$ .
- 3.2. Justifique que a recta de equação  $x = 0$  é uma assíntota do gráfico de  $h$  e estude a existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.
- 3.3. Mostre que, no intervalo  $]0, 2[$ , existe pelo menos um objecto cuja imagem, por meio de  $h$ , é  $4$ .

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}_0^+$ , definida por  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Seja  $g$  a função, também de domínio  $\mathbb{R}_0^+$ , definida por  $g(x) = f(x+a) - f(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Prove que o eixo  $Ox$  é uma assíntota do gráfico de  $g$ .

FIM

### Formulário

<b>Limites notáveis</b> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
---	--

### COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0		
<b>Grupo II</b> (146 pontos)	1.....22	2.....52	3.....56	4.....16
	1.1.....10	2.1.....14	3.1.....19	
	1.2.....12	2.2.....19	3.2.....19	
		2.3.....19	3.3.....18	