

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 1

2.º Período - 23/02/06

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação: ,

O professor: _____

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Sabe-se que um em cada quatro cidadãos europeus sofre de um qualquer tipo de depressão. Considere cinco cidadãos europeus escolhidos ao acaso e seja p a probabilidade de **pelo menos** um deles sofrer de depressão. Qual é o valor de p , aproximado às milésimas?

(A) 0,763

(B) 0,573

(C) 0,347

(D) 0,237

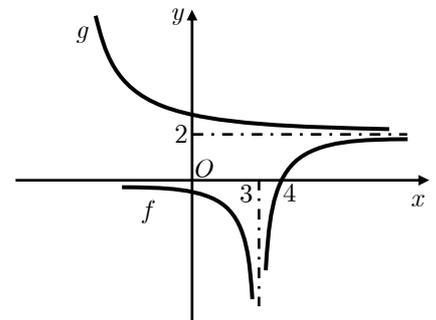
2. “Contudo, a resposta da escola para esta situação tinha sido colocar a criança a saltitar de sala em sala (todos os dias uma) numa fórmula em que repartir o mal pelas aldeias foi tida como a acertada. Bom exemplo perpetuante de uma descontinuidade, de ausência de limites (...). Uma criança é mais que o somatório de várias funções.”

VIVEMOS LIVRES NUMA PRISÃO, Daniel Sampaio

Na figura estão as representações gráficas da função f , de domínio

$\mathbb{R} \setminus \{3\}$ e da função g , de domínio \mathbb{R} . Sabe-se que:

- As rectas de equações $x = 3$, $y = 0$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de f ;
- A recta de equação $y = 2$ é assíntota do gráfico de g ;
- 4 é um zero de f .



- 2.1. Considere a sucessão definida por $u_n = \frac{e^n}{n^{20}}$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$?

(A) $-\infty$ (B) $+\infty$

(C) 2

(D) 0

- 2.2. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$?

(A) 2

(B) 0

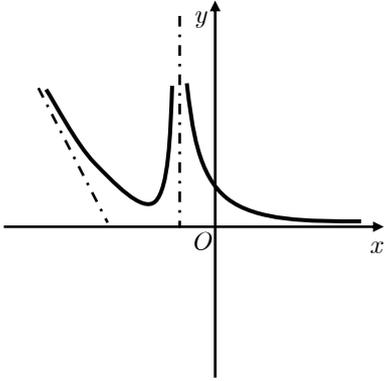
(C) $+\infty$ (D) $-\infty$

3. De uma função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, sabe-se que:

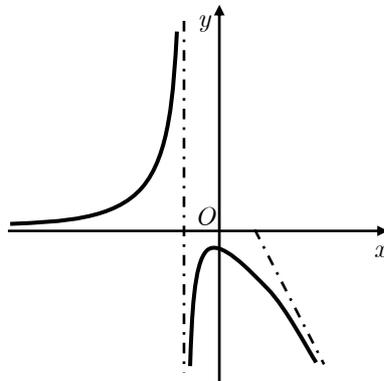
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -2$$

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h ?

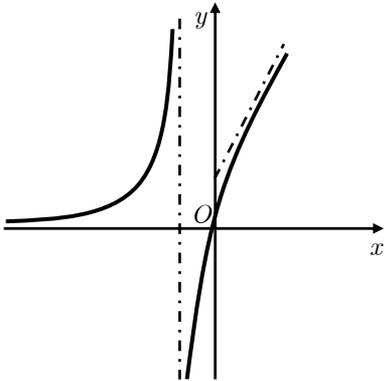
(A)



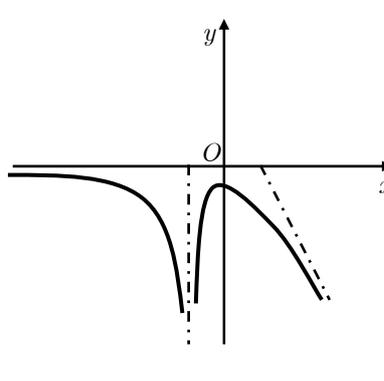
(B)



(C)



(D)



4. O gráfico de uma função f , cujo domínio está contido no intervalo $[-4, 3]$, está representado na figura ao lado.

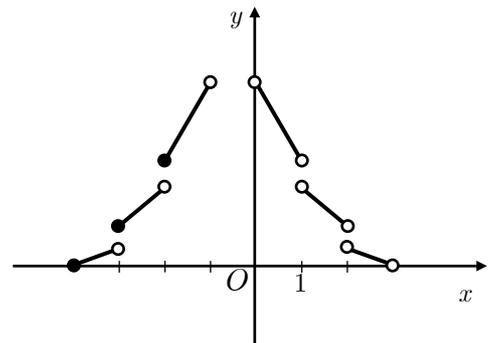
Qual pode ser o conjunto das abcissas dos pontos de descontinuidade do gráfico de f ?

(A) $\{1; 2; 3\}$

(B) $\{-3; -2\}$

(C) $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

(D) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$



5. Considere a função definida por $g(x) = \log_4(x + 5)$.

Sabe-se que a recta de equação $y = \frac{x+4}{\ln 4}$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -4 .

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{g(x)}{x+4}$?

(A) -4

(B) 0

(C) $\frac{4}{\ln 4}$

(D) $\frac{1}{\ln 4}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere o conjunto A constituído por todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

1.1. Quantos elementos do conjunto A são múltiplos de 5, **diferentes** entre si?

1.2. Escolhe-se, ao acaso, um elemento de A .
Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 9.
Apresente o resultado na forma de dízima, com duas casas decimais.

2. “-Mas como é que pode ter visto? Quando caíram abaixo do nível do capô do carro, o seu campo de visão ...
-Eu compreendo muito bem os ângulos – disse a professora de Matemática ríspidamente.”

JUSTIÇA LOCAL, Jay Brandon

Uma professora de Matemática acha que a temperatura, em graus Celsius, do motor do seu automóvel é

dada, em função dos quilómetros percorridos x , por
$$t(x) = \begin{cases} 22,5 \times 4^x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 90 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

2.1. Qual é a temperatura do motor do automóvel após percorrer 800 metros?
Apresente o resultado em graus Celsius arredondado às unidades.

2.2. **Sem recorrer à calculadora**, justifique que a função t é contínua no seu domínio.

2.3. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), mostre que houve pelo menos uma distância percorrida pelo automóvel, entre os 0,5 e os 1,5 quilómetros, após o qual o seu motor atingiu os 80°C de temperatura.

3. Considere a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x}$.

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

3.1.2. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, mostre que $f'(2) = \frac{1}{2}$.

3.2. Seja r a recta que passa no ponto $A(0, -2)$ e é paralela à recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

Esta recta r intersecta o gráfico de f num ponto de ordenada **positiva**. Recorrendo à calculadora gráfica, determine, arredondado às centésimas, a abcissa desse ponto.

Explique como procedeu.

4. Seja g uma função contínua, par e tal que $g(3) = 2$.

Seja h uma função de domínio $[-3, 3]$ e tal que $h(x) = x \cdot g(x)$.

Prove que a equação $h(x) = 0$ é possível.

FIM

Formulário

Limites notáveis	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	--------------------------	---

Grupo II (146 pontos)	1.....22	2.....51	3.....57	4.....16
	1.1.....10	2.1.....15	3.1.1.....19	
	1.2.....12	2.2.....18	3.1.2.....19	
		2.3.....18	3.2.....19	