

4.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 5

Duração: 90 minutos
2.º Período - 9/03/05

Classificação:

 ,

Nome: _____

N.º: _____

O professor:

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Dada a função definida por $h(x) = \log_3\left(\frac{x}{9}\right)$, sabe-se que $h(a) = 1$. Qual é o valor de a ?

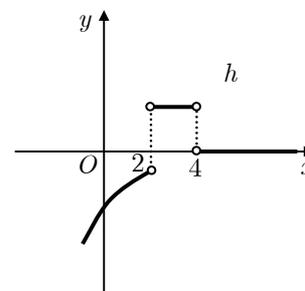
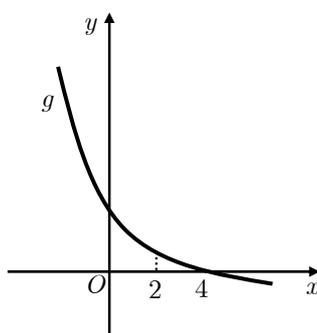
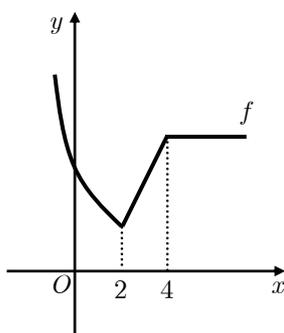
(A) 27

(B) 18

(C) 9

(D) 3

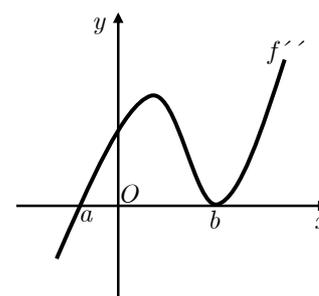
2. Na figura junta estão parte das representações gráficas de três funções, respectivamente f , g e h .



Pode afirmar-se que:

(A) f é a função derivada de g (B) g é a função derivada de f (C) f é a função derivada de h (D) h é a função derivada de f

3. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f'' , **segunda derivada** da função f . Em que intervalo está a concavidade do gráfico da **função f** voltada para baixo?

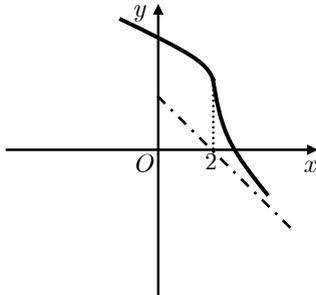
(A) $]a, 0[$ (B) $]0, b[$ (C) $]-\infty, a[$ (D) $]b, +\infty[$ 

4. Considere uma função g derivável em \mathbb{R} . Sabe-se que:

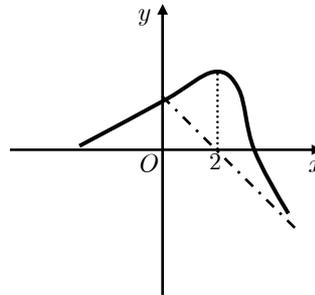
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 \quad ; \quad \text{o gráfico de } g \text{ admite um único ponto de inflexão.}$$

Qual das seguintes pode ser a representação gráfica de g' , **derivada** de g ?

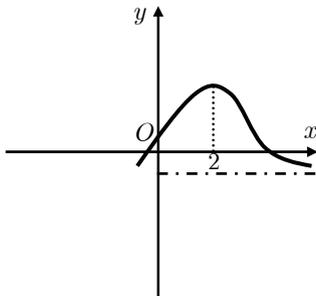
(A)



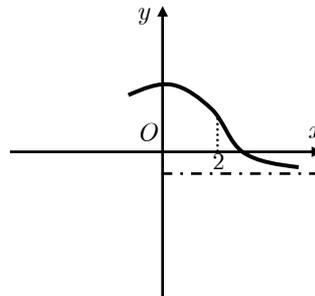
(B)



(C)



(D)



5. Numa corrida de motas, há dez concorrentes.
De quantas maneiras diferentes podem chegar os três primeiros classificados?

(A) 720 (B) 120 (C) 30 (D) 6

6. Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem **dezoito** números. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.
Qual é a probabilidade de esse número ser inferior a 200 ?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Durante alguns anos, o preço por metro quadrado de terreno numa certa zona da cidade desceu. Quando se soube que a câmara municipal pretendia valorizar essa zona, esse mesmo preço começou de imediato a aumentar.

Suponha que o preço por metro quadrado (em euros) desse terreno é dado pela função definida por $P(t) = 45 - 100 \frac{\ln(16-t)}{16-t}$, $t \in [0, 15]$ (considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano 1990).

Nas três alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 1.1. Qual foi o preço de um terreno com cem metros quadrados no início de **Julho** de 1997? Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.
- 1.2. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

Em que instante a câmara municipal pretendeu valorizar essa zona da cidade?

Apresente o ano e o mês.

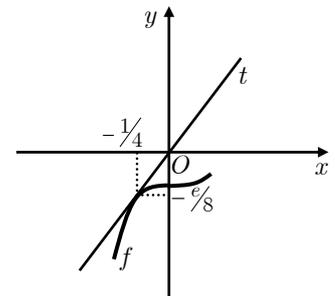
- 1.3. O conjunto solução da inequação $P(t) \leq 19$ é um intervalo fechado $[a, b]$. Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b , arredondados às décimas. Numa pequena composição, **interprete** a solução no contexto do problema.

Nota: Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

2. Na figura ao lado, está parte do gráfico da função f de domínio \mathbb{R} .

A recta t é tangente a esse gráfico no ponto $(-\frac{1}{4}, -\frac{e}{8})$.

Sabe-se que a **derivada** de f está definida por $f'(x) = 8x^2 e^{-4x}$.



- 2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as três alíneas seguintes:

2.1.1. Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 8x^2}{x^3}$.

2.1.2. Determine a equação reduzida da recta t .

2.1.3. Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

- 2.2. O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela à recta $y = 3x - 2$. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu.

3. O Teorema de ROLLE¹ diz que, se uma função f é contínua num intervalo $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e se além disso se tem $f(a) = f(b)$, então $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

Considere a função real definida por $g(x) = \ln(7x - x^2)$. Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes:

- 3.1. Determine o domínio de g .
- 3.2. Mostre que se pode aplicar o Teorema de Rolle à função g em $]1, 6[$.
- 3.3. Determine o valor de c a que se refere o enunciado do teorema.

FIM

Formulário

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada resposta errada: - 2	Cada questão não respondida ou anulada: 0
--------------------------------------	---------------------------	---------------------------	---

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II (140 pontos)	1 46	2 64	3 30
	1.1 12	2.1.1 14	3.1 10
	1.2 18	2.1.2 16	3.2 10
	1.3 16	2.1.3 18	3.3 10
	2.2 16		

O professor: RobertOliveira

¹ Michel ROLLE (1652–1719): matemático francês cuja obra prima é *Traité d'Algèbre*.