

**4.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2**

Duração: 90 minutos  
2.º Período - 10/03/05

Classificação:   ,

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

O professor: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere a função  $f$ , de domínio  $]-\infty, 2]$ , definida por  $f(x) = \ln(2 - x)$ . Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com os eixos coordenados.

Sendo  $O$  a origem do referencial, qual é o valor aproximado da área do triângulo  $[ABO]$ ?

- (A) 0,2                      (B) 0,25                      (C) 0,35                      (D) 0,4

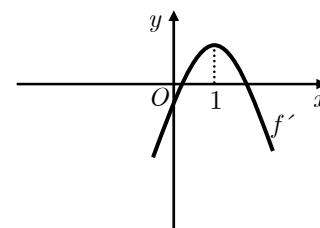
2. O gráfico de uma função real  $g$  tem a assíptota de equação  $x = -5$ .

Qual das expressões seguintes pode ser o da função  $g^{-1}$ , função inversa de  $g$ ?

- (A)  $8^x + 5$                       (B)  $8^x - 5$                       (C)  $5^x - 8$                       (D)  $5^x + 8$

3. De uma função  $f$ , sabe-se que a sua **derivada**,  $f'$ , é quadrática e tem a representação gráfica em baixo. Considere as seguintes proposições:

- (I) A função  $f$  é crescente em  $]-\infty, 1]$ .  
 (II) O gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, 1]$ .  
 (III) A função  $f$  tem um máximo relativo para  $x = 1$ .  
 (IV) O gráfico da função  $f$  tem um ponto de inflexão.



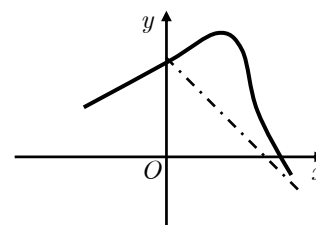
Assim, são verdadeiras as proposições:

- (A) (I) e (II)                      (B) (I) e (III)                      (C) (II) e (III)                      (D) (II) e (IV)

4. Ao lado está parte do gráfico de uma função  $h$ , com a sua única assíptota.

Qual pode ser o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\pi x)}{x}$ ?

- (A)  $2\pi$                       (B)  $-2\pi$   
 (C) 0                      (D)  $+\infty$



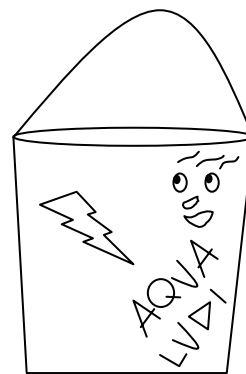
5. Ao fazer uma sondagem sobre a aderência a certos sítios na *Internet*, concluiu-se que o número de horas que os inquiridos passam na *internet* segue uma distribuição normal de média igual a 3. Em relação aos inquiridos, pode afirmar-se que são equiprováveis os acontecimentos:
- (A) “Passam mais de duas horas na *Internet*” e “Passam menos de três horas na *Internet*”  
 (B) “Passam mais de duas horas na *Internet*” e “Passam menos de quatro horas na *Internet*”  
 (C) “Passam mais de três horas na *Internet*” e “Passam menos de quatro horas na *Internet*”  
 (D) “Passam mais de três horas na *Internet*” e “Passam menos de cinco horas na *Internet*”
6. Uma pessoa vai visitar cinco locais, situados no Parque das Nações, em Lisboa: o Pavilhão de Portugal, o Oceanário, o Pavilhão Atlântico, a Torre Vasco da Gama e o Pavilhão do Conhecimento. Supondo que essa pessoa vai fazer as visitas ao acaso, qual é a probabilidade de começar na Torre Vasco da Gama e acabar no Oceanário?
- (A)  $\frac{1}{20}$                       (B)  $\frac{1}{15}$                       (C)  $\frac{1}{10}$                       (D)  $\frac{1}{5}$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Num parque aquático, uma das atracções é um balde enorme onde a água vai entrando e, quando o balde está cheio, vira e a água cai para cima dos veraneantes. Admita que o volume de água do balde,  $t$  minutos após começar a encher, é dado, em metros cúbicos, por  $V(t) = 10 \frac{\ln(15-t)}{15-t} - 1,8$  para certos valores de  $t$ ,  $t \geq 0$ . Nas três alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.



- 1.1. Se, às onze horas, começar a entrar água no balde, qual será o seu volume às onze horas e dez minutos?  
 Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às centésimas.
- 1.2. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:  
*Após quanto tempo o balde está cheio?*  
 Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondado às unidades).
- 1.3. O conjunto solução da inequação  $V(t) \geq 1$  é um intervalo fechado  $[a, b]$ . Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para  $a$  e  $b$ , arredondados às décimas. Numa pequena composição, **interprete** a solução no contexto do problema.

**Nota:** Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

2. Considere a função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3 + x e^{1-2x}$ .

2.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes:

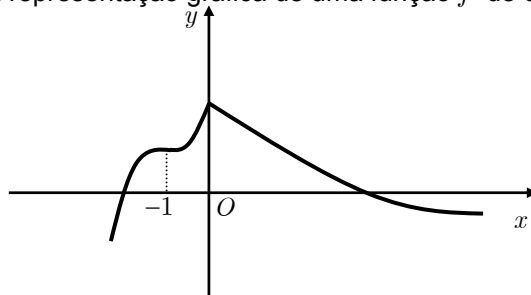
2.1.1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 0.

2.1.2. Mostre que  $f''(x) = (4x - 4)e^{1-2x}$

2.1.3. Mostre que o gráfico da função  $f$  tem um único ponto de inflexão e determine-o.

2.2. O gráfico de  $f$  e a bissetriz dos quadrantes pares intersectam-se num único ponto. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abscissa desse ponto. Explique como procedeu.

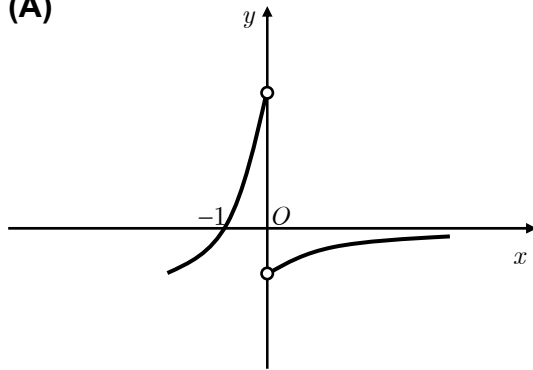
3. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$ .



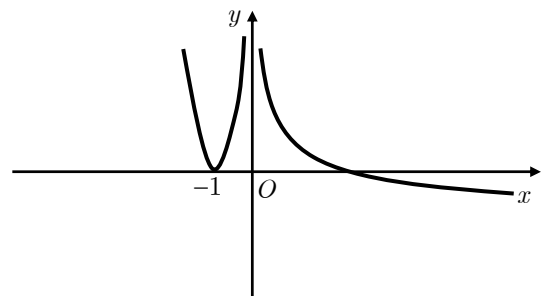
Qual das seguintes pode ser a representação gráfica da função  $f'$ , derivada de  $f$ ?

Numa pequena **composição**, (cinco a dez linhas), indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos (indique três razões, uma por cada gráfico rejeitado).

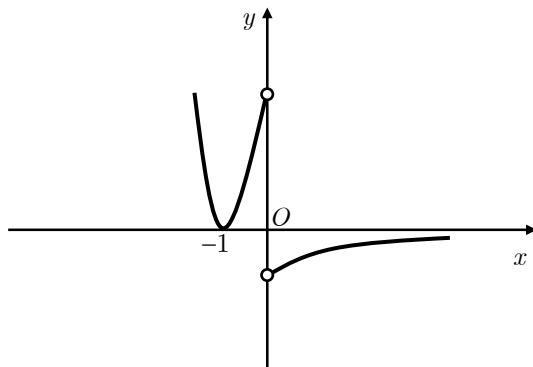
(A)



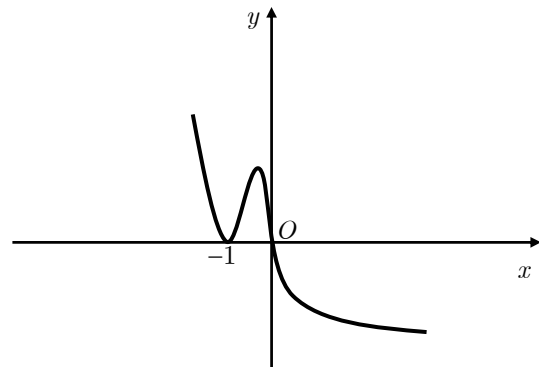
(B)



(C)



(D)



4. Uma função  $g$ , contínua num conjunto  $D \setminus \{a\}$ , pode ser **Prolongada por Continuidade** a  $D$  através da

$$\text{Função Prolongamento } g_p(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) & \text{se } x = a \end{cases}$$

Considere a função definida por  $h(x) = \frac{\ln(2x+3)}{2x+2}$ , de domínio  $]-\frac{3}{2}, +\infty[ \setminus \{-1\}$ .

Usando processos analíticos, indique, o mais simplificado possível, a função prolongamento  $h_p$  ao conjunto  $]-\frac{3}{2}, +\infty[$ .

FIM

## Formulário

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

## COTAÇÕES

<b>Grupo I (60 pontos)</b>	Cada resposta certa: + 10	Cada resposta errada: - 2	Cada questão não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	---------------------------	---------------------------	---

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

<b>Grupo II (140 pontos)</b>	<b>1</b> ..... <b>46</b>	<b>2</b> ..... <b>64</b>	<b>3</b> ..... <b>15</b>	<b>4</b> ..... <b>15</b>
	<b>1.1</b> ..... <b>12</b>	<b>2.1.1</b> ..... <b>16</b>		
	<b>1.2</b> ..... <b>18</b>	<b>2.1.2</b> ..... <b>14</b>		
	<b>1.3</b> ..... <b>16</b>	<b>2.1.3</b> ..... <b>18</b>		
	<b>2.2</b> ..... <b>16</b>			