

**4.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2**

**Duração: 90 minutos**  
**2.º Período – 22/03/04**

**Classificação:**   ,

**Nome:** \_\_\_\_\_ **N.º:** \_\_\_\_\_

**O professor:** \_\_\_\_\_

**Grupo I**

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Ao lado está a tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória  $X$ .  
 Qual é a proposição **falsa**?

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$a$	$b$	0,3	0,3

- (A)  $a + b = 0,4$       (B)  $a = 0,5$       (C)  $b = 0,3$       (D)  $a - b = 0,1$

2. A função definida por  $f(x) = \begin{cases} \log_2(x + k) & \text{se } x > 6 \\ 3 & \text{se } x = 6 \\ (x - 3)^2 & \text{se } x < 6 \end{cases}$  é contínua **só à direita** de  $x = 6$ .

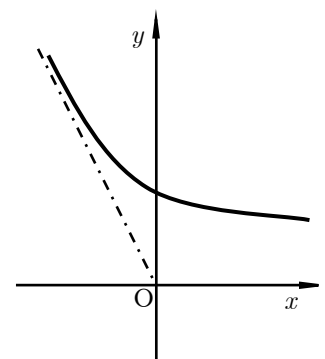
Qual é o valor de  $k$  ?

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3

3. Na figura estão representadas, em referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico de uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$  e a sua assíntota.

Qual poderá ser o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x)$  ?

- (A) -2      (B)  $-\infty$   
 (C) 1      (D)  $+\infty$



4. Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$  ?

(A) 2

(B) 0

(C)  $e^2$

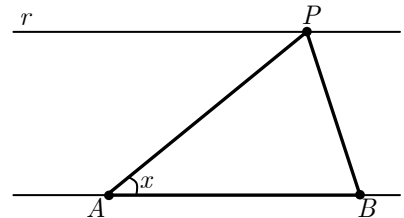
(D)  $e$

5. Na figura ao lado estão representadas duas rectas paralelas, a recta  $r$  e a recta  $AB$ . O ponto  $P$  move-se ao longo da recta  $r$ .

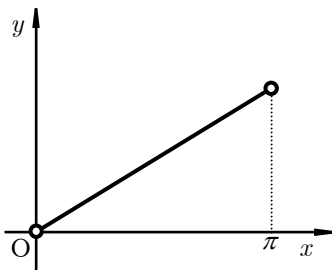
Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude do ângulo  $PAB$

e seja  $h(x)$  a área do triângulo  $ABP$ .

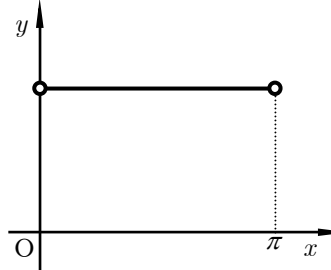
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $h$  ?



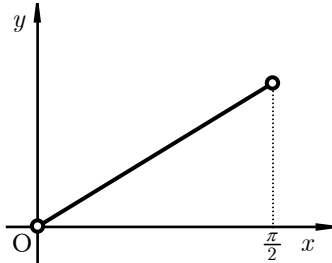
(A)



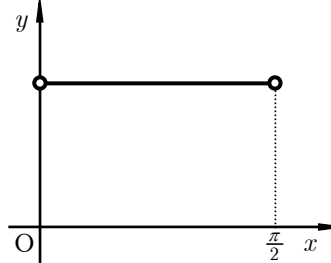
(B)



(C)



(D)



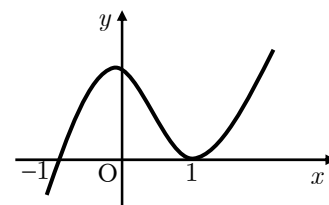
6. Na figura ao lado está o gráfico de uma função cúbica  $f'$ , **primeira derivada** de uma função  $f$ . Qual é a proposição **necessariamente** verdadeira?

(A)  $f$  é crescente em  $[1, +\infty[$

(B)  $f$  é negativa em  $]-\infty, -1[$

(C)  $f$  é decrescente em  $[1, +\infty[$

(D)  $f$  é positiva em  $]-\infty, -1[$



## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. O director de uma empresa estima que o lucro gerado pela venda de leitores de *DVD*, em função do preço  $x$  (em euros), é dado por

$$d(x) = \ln(348x^2 - x^3) \quad (x \in [100, 345]) \quad (d \text{ vem em milhares de euros})$$

- 1.1. Qual será o lucro da empresa se o preço for de € 140?  
Apresente o resultado arredondado às milésimas.
- 1.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para cálculos numéricos), indique o preço **óptimo** de cada leitor de *DVD*.
- 1.3. Considere a seguinte questão:

*O economista da empresa acha que se cada leitor de DVD custar entre € 100 e € 300, a empresa conseguirá sempre obter um lucro superior a € 15.000.  
Será possível com este modelo?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição (cinco a dez linhas), explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenada(s) de ponto(s) (coordenadas arredondadas às décimas).

- 1.4. Um catálogo da empresa tem vinte e cinco páginas e cada página contém um aparelho diferente dos outros.  
De quantas maneiras se podem pôr cinco leitores de *DVD* diferentes no catálogo?

2. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que o seu gráfico passa na origem do referencial e que a sua **derivada**  $f'$ , definida igualmente em  $\mathbb{R}$ , é dada por  $f'(x) = (5 - 5x)e^{-x}$

- 2.1. Usando processos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes.

2.1.1. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 0.

2.1.2. Mostre que o gráfico de  $f$  tem apenas um ponto inflexão.

2.1.3. Determine, se existirem, as equações das assíntotas horizontais do **gráfico de  $f'$** .

- 2.2. Seja  $A$  um ponto do **gráfico de  $f'$**  e tal que a sua abcissa é igual à sua ordenada.

Seja  $B$  um ponto maximizante do **gráfico de  $f$** .

Sendo  $O$  a origem do referencial, recorra à calculadora para determinar um valor aproximado da área do triângulo  $ABO$ . Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).  
Apresente os cálculos intermédios e o resultado arredondado às centésimas.

3. De duas funções  $g$  e  $h$ , contínuas em  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

» o eixo  $Ox$  é uma assíntota do gráfico de  $g$ ;

»  $g'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

»  $h(x) = -g(x) + 1$ ;

Prove que 1 não pertence ao contradomínio da função  $h$

FIM

## COTAÇÕES

**Grupo I** ..... 6

Cada resposta certa: +1	Cada resposta errada: -0,2	Cada questão não respondida ou anulada: 0
-------------------------	----------------------------	---

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

**Grupo II** ..... 14

1.....5,8	2.....6,7	3.....1,5
1.1.....1,2	2.1.1.....1,7	
1.2.....1,8	2.1.2.....1,7	
1.3.....1,6	2.1.3.....1,7	
1.4.....1,2	2.2.....1,6	

O professor: RobertOliveira      Net: [sm.page.vu](mailto:sm.page.vu) ou [roliveira.pt.to](mailto:roliveira.pt.to)

## Formulário

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$