Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2002/2003)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 3

Duração: 90 minutos
2.º Período – 24/03/03
Nome: N.º: O professor:

Classificação: ,

Grupo I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Admita que, numa dada altura do ano, a variável «*temperatura média das localidades*» na zona costeira sul da ilha da Madeira segue uma distribuição aproximadamente normal, de média $24°$ Celsius. Suponha-se que um turista visita, aleatoriamente, uma dessas localidades. Relativamente à temperatura desta localidade, é mais provável que ela seja:

(A) Inferior a $27°$ Celsius.

(B) Superior a $22°$ Celsius.

(C) Superior a $27°$ Celsius.

(D) Inferior a $22°$ Celsius.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} 3^x-2 & \text{se } x\geq 0 \\ \log_3(x+9) & \text{se } x<0 \end{cases}$.

Relativamente à continuidade da função *f*, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua

(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita

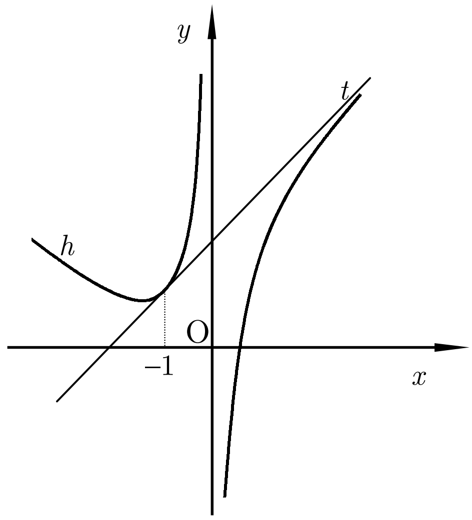
(C) É descontínua à esquerda e à direita

(D) É contínua à direita e descontínua à esquerda

3. Para o atleta Carlos Altis, a altura a que conseguirá saltar se seguir o seu novo método de treino vai evoluir de acordo com a função definida por $A(t)=\frac{12t+60}{6t+33}$, sendo A a altura em metros e t o tempo em semanas. Assim, podemos afirmar que, após quatro semanas de treino, a altura do Carlos estará a aumentar a uma velocidade, em **centímetros por semana**, aproximadamente igual a:

(A) $0{,}5$ **(B)** 1 **(C)** $1{,}5$ **(D)** 2

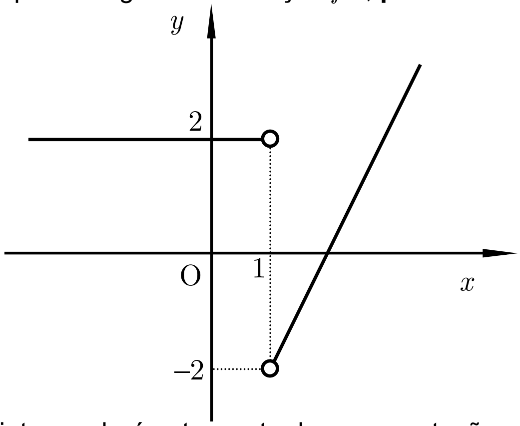
4. Na figura estão representadas, num referencial o.n. $x\mathrm{O}y$, parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a recta t, assimptota do gráfico de h e tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa -1. Qual é a proposição verdadeira?



(A) $h'(-1) = \lim\limits_{x \to 0} h(x)$ **(B)** $h'(-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}$

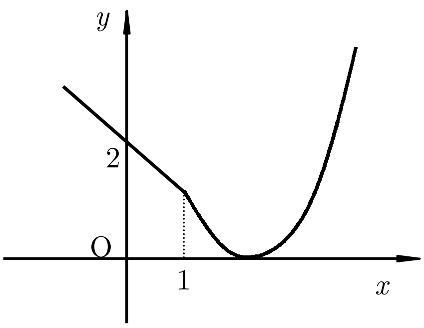
(C) $h'(-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ **(D)** $h'(-1) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x}$

5. Em baixo está desenhada parte do gráfico da função $f\,'$, **primeira derivada** de uma função f,

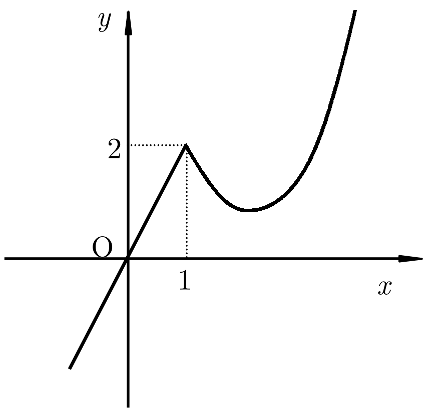


Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função** f?

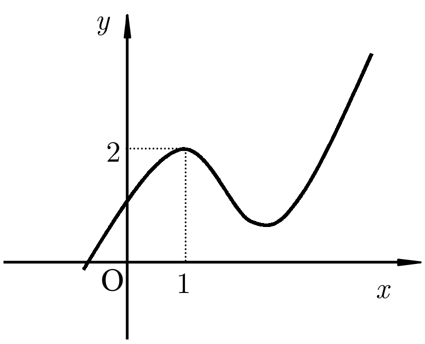
(A)



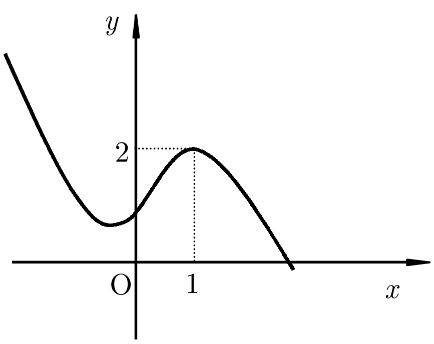
(B)



(C)



(D)



Grupo II

> Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
>
> **Atenção**: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Segundo a empresa de audimetria *Marktest*, a telenovela «Saber Amar» (do canal de televisão TVI) foi o programa mais visto no passado dia dezoito de Março, com uma audiência de $39{,}4\%$ (em relação às pessoas que estavam a ver televisão naquele momento).
Suponha que, de todas as pessoas que viram esse programa, 80% eram mulheres. Suponha ainda que 50% de homens viam outros programas àquela hora.

1.1. Escolhido, ao acaso, um telespectador naquele dia e à hora daquele programa, qual foi a probabilidade de ele ter sido do sexo feminino?

1.2. Na sua casa, a sra. Felismina preparou-se bem para ver a sua telenovela favorita, «Saber Amar», no dia dezoito de Março. Estavam lá todos os seus doze gatos e não faltaram os lenços de papel para limpar as lágrimas.
Na sala da televisão há vinte lugares onde, em cada um deles, cabe um gato. Cinco desses lugares estão num sofá. Sabendo que todos os gatos foram para doze lugares aleatoriamente, qual foi a probabilidade de os cinco siameses da sra. Felismina terem ficado no sofá? Apresente o resultado na forma de dízima, com seis casas decimais.

2. A diminuição da concentração do isótopo radioactivo do Carbono, o Carbono 14, pode ser dada aproximadamente pela função definida por $C(t) = k\,e^{-0{,}012t}$.

A variável t designa o tempo, medido em séculos, que decorre desde o instante em que a quantidade de Carbono 14 começa a diminuir num corpo; o parâmetro k refere-se à concentração inicial de Carbono 14 desse corpo, em quilos.

2.1. Considere um corpo com concentração inicial de Carbono 14 igual a 3 quilos.

2.1.1. Calcule, com aproximação às milésimas, a quantidade de Carbono 14 presente nesse corpo após 1000 anos.

2.1.2. Recorrendo a métodos analíticos, calcule a velocidade de diminuição da concentração de Carbono 14 após 3 séculos. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

2.2. Verifique que, para qualquer valor de t, $\frac{C(t+1)}{C(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às centésimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

2.3. *Matusalém*, a árvore mais velha do mundo, foi datada com a técnica do Carbono 14. Pegou-se num pedaço da árvore e chegou-se à conclusão que esta tem $56{,}44\%$ da concentração inicial de Carbono 14. Recorrendo a métodos analíticos, determine a idade da árvore, apresentando o resultado em anos, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 9\ln x - 2x$.

3.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes.

3.1.1. Mostre que a função f tem um único máximo.

3.1.2. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f\,'(1)$.

3.2. Considere agora a função g tal que a função f é a **função derivada** de g. Esta função g tem um único mínimo relativo. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa que minimiza a função g (apresente o resultado arredondado às centésimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **5**

Cada resposta certa: + 1	Cada resposta errada: – 0,2	Cada questão não respondida ou anulada: 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Grupo II **15**

1....**3,2**	**2.**...**6,7**	**3.**...**5,1**
1.1..............................1,5	**2.1.1.**...........................1,4	**3.1.1.**...........................1,7
1.1..............................1,7	**2.1.2.**...........................1,7	**3.1.2.**...........................1,7
	2.2..............................1,7	**3.2.**.............................1,7
	2.3..............................1,9	

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n.u^{n-1}.u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira
internet: sm.page.vu
ou go.to/roliveira