

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 13

2.º Período 12/03/13 Duração: 90 minutos
 Nome: N.º:
 Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. “Nos bastidores da televisão fazem-se testes de imagem, estudam-se as nuances e as probabilidades inesperadas, todas as interpretações.”

SANGUE VERMELHO EM CAMPO DE NEVE, Mons Kallentoft

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	4	a
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{30}$	b

(a e b designam números reais).

Sabe-se que o valor médio de X é igual a 6,65

Quais são os valores de a e de b ?

- (A)** $a = 10$ e $b = \frac{7}{12}$ **(B)** $a = 30$ e $b = \frac{7}{12}$
(C) $a = 10$ e $b = \frac{7}{40}$ **(D)** $a = 30$ e $b = \frac{7}{40}$

2. No triângulo de Pascal, sabe-se que a soma de **todos** os elementos de duas linhas consecutivas é igual a 24 576

Considerando a menor das duas linhas, qual é o terceiro elemento dessa linha?

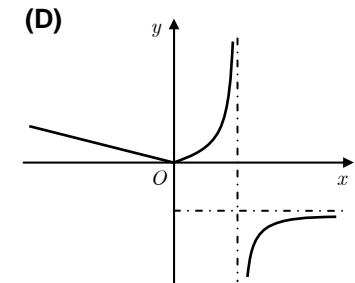
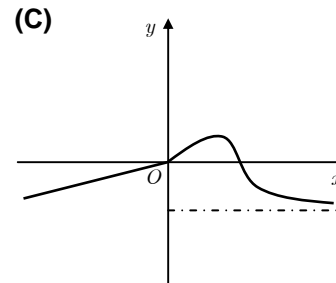
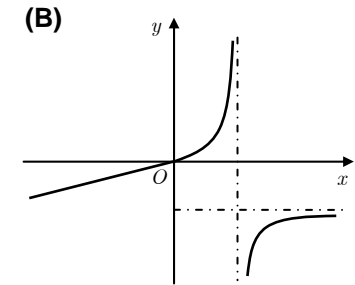
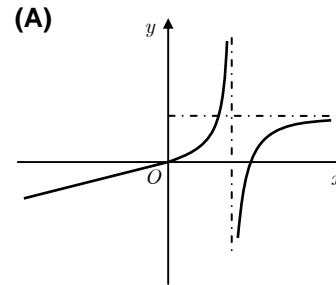
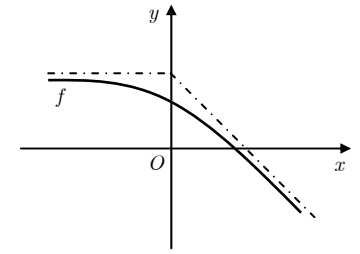
- (A)** 66 **(B)** 78 **(C)** 91 **(D)** 105

3. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio \mathbb{R} , contínua em todo o seu domínio.

Tal como é visível, o gráfico de f admite duas assíntotas não verticais.

Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por

$$g(x) = \frac{x}{f(x)}$$

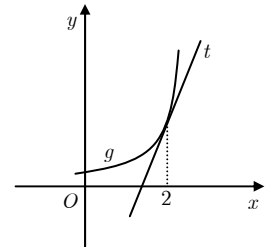


4. Considere, no referencial o.n. xOy da figura ao lado, parte do gráfico da função g de domínio \mathbb{R} e a reta t , tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2

Sabe-se que a equação de t é $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{g(x)-g(2)}$?

- (A)** $-\frac{2}{7}$ **(B)** $-\frac{7}{2}$
(C) $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{5}{2}$

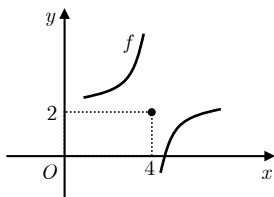


5. Considere, ao lado, parte do gráfico da função f de domínio \mathbb{R} .
Seja a função, também de domínio \mathbb{R} , definida por

$$h(x) = x^3$$

Quanto ao valor de $(f \times h)'(4)$:

- (A) É igual a $+\infty$ (B) É igual a $-\infty$
(C) É igual a 0 (D) Ele não existe



Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: 1) escolha, para resolver, ou a questão 2. ou a 5.2.

2) quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. “Mas, de qualquer maneira, as estradas são retas, construídas para funcionar como pistas de aterragem se houver guerra. Mas quais são as probabilidades de haver guerra?”

SANGUE VERMELHO EM CAMPO DE NEVE, Mons Kallentoft

Devido a várias convulsões sociais, sabe-se que a probabilidade de um certo país entrar em guerra civil, após t semanas, é dada pela função definida por

$$p(t) = \frac{64}{100+3^{4,2-0,05t}}$$

Sem usar a calculadora (exceto em cálculos numéricos), resolva os seguintes itens.

- 1.1. Nesse país, quatro quintos da população está mal preparada para enfrentar uma guerra civil.
Ao escolher, ao acaso, três habitantes do país, seja k a probabilidade de todos eles estarem mal preparados para uma guerra.
Após t semanas, constatou-se que a probabilidade do país entrar em guerra civil foi igual a k . Quantas semanas tinham passado?
Apresente o resultado arredondado às décimas.
Se usar cálculos intermédios, considere, pelo menos, três casas decimais.
- 1.2. Segundo este modelo, qual é a probabilidade de o país entrar em guerra civil com o decorrer do tempo? Justifique a resposta.

2. Seja f a função de domínio \mathbb{R} definida por $f(x) = 5x + 2e^{-x}$

Sem usar a calculadora, estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

3. Seja k um número real positivo e seja h a função de domínio \mathbb{R}^+ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{kx}}{x - k} & \text{se } x \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = k \end{cases}$$

Mostre que a função h é contínua para $x = k$

4. Considere a função de domínio \mathbb{R} definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x < 0 \\ \ln(10x + 4) - \ln(2x + 4) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Usando métodos analíticos, resolva os itens 4.1. e 4.2.

- 4.1. Mostre que a função f é derivável no ponto de abscissa 0
- 4.2. Verifique, sem a resolver, que a equação $f(x) = 1,5$ é possível em $]-4,6[$
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às centésimas.
- 4.3. Considere, num referencial xOy , o triângulo $[ABC]$, de área igual a 2, sendo que:
- o ponto A pertence ao gráfico de f , tem abscissa positiva e ordenada igual a 1
 - o ponto B pertence ao eixo Ox e a sua abscissa é igual à do ponto A
 - o ponto C pertence ao gráfico de f e tem abscissa inferior a -2
- Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abscissa do ponto C (arredondada às décimas).
- Apresente na sua resposta:
- um referencial xOy e o gráfico da função f no domínio $[-3,3]$
 - o triângulo $[ABC]$
 - a abscissa pedida.
- Nota:** Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

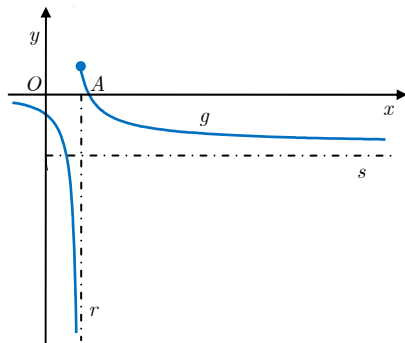
5. Uma função g , de domínio \mathbb{R} , é tal que $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-2x+1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1-4 \ln x}{1+2 \ln x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g

Tal como a figura sugere:

- A é o ponto do gráfico de g pertencente ao eixo Ox
- r é a assíntota vertical do gráfico de g
- s é a assíntota horizontal do gráfico de g

Sem usar a calculadora, resolva os itens seguintes.



5.1. Determine a abcissa de A

5.2. Escreva, justificando, as equações das retas r e s

FIM

Formulário

Probabilidades

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....35	2.....20	3.....20	4.....60	5.....35
	1.1.....20			4.1.....20	5.1.....15
	1.2.....15			4.2.....20	5.2.....20
			4.3.....20		