

Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt

Escola Secundária de Francisco Franco (2011/2012)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º ano

3.º Período

04/06/12

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correta.

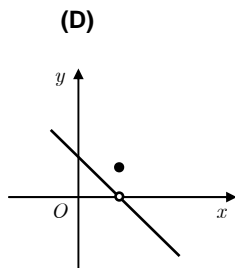
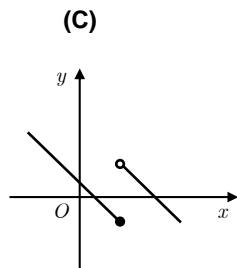
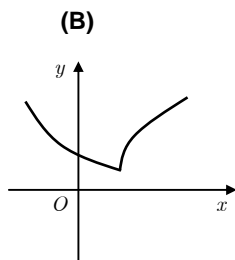
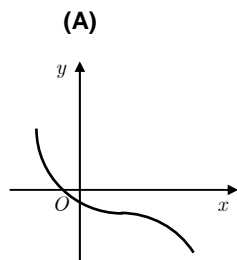
Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. De uma função g , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que $g'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

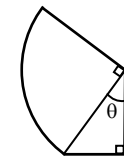
Qual das figuras seguintes não pode representar o gráfico da função g ?



2. Na figura estão representados um quarto de círculo e um triângulo retângulo.

Tal como é sugerido pela figura, o raio do quarto de círculo é a hipotenusa do triângulo e um dos catetos mede 1

Qual das expressões dá o **perímetro** da figura em função do ângulo θ representado?

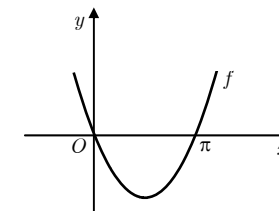


- (A) $\frac{0,5\pi + \text{sen}\theta + \cos\theta + 1}{\cos\theta}$ (B) $\frac{\pi + \text{sen}\theta + \cos\theta + 1}{\cos\theta}$
- (C) $\frac{0,5\pi + \text{sen}\theta + \cos\theta + 1}{\text{sen}\theta}$ (D) $\frac{\pi + \text{sen}\theta + \cos\theta + 1}{\text{sen}\theta}$

3. No referencial ao lado está parte da representação gráfica de uma função quadrática f

Tal como a figura sugere, 0 e π são zeros de f

Qual pode ser o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\text{sen}x}$?

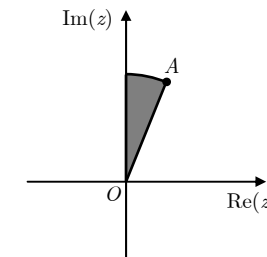


- (A) $-\infty$ (B) -2
- (C) 0 (D) π

4. Na figura está representada, no plano complexo, uma zona a sombreado. Sabe-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica de um número complexo z
- $\overline{OA} = 1$
- a área da região a sombreado é igual a $\frac{\pi}{16}$

Qual dos números complexos seguintes representa z ?



- (A) $2 \text{cis} \frac{3\pi}{8}$ (B) $\text{cis} \frac{3\pi}{8}$ (C) $2 \text{cis} \frac{7\pi}{18}$ (D) $\text{cis} \frac{7\pi}{18}$

5. Num certo teste, existem duas questões de escolha múltipla, ambas com 4 alternativas de resposta. No entanto, na primeira questão há apenas uma resposta certa e na segunda existem duas certas.

O Higinio não estudou o que devia de modo que vai responder ao acaso a ambas as questões. Qual é a probabilidade de ele acertar nessas duas questões?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{24}$ (D) $\frac{1}{32}$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1. Numa certa cidade, o número de horas de luz solar em cada um dos dias de 2012 é dado, aproximadamente, por

$$g(x) = 12,18 + 3,11 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{183} - 2,45\pi \right) \text{ em}$$

que $x \in [1, 366]$



O argumento da função seno está expresso em radianos.

Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve pelo menos duas casas decimais.

- 1.1. O solstício de inverno está previsto para o dia 21 de dezembro. Nesse dia, quanto tempo de luz solar terá a cidade?

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

- 1.2. Recorrendo à sua calculadora, resolva o seguinte problema:

“Depois de atingir o máximo de luz solar em 2012, durante quantos dias vai haver, nessa cidade, luz solar durante mais de doze horas?”

Indique como procedeu, apresentando o(s) gráfico(s) relevante(s) para o problema.

2. Sejam f uma função de domínio \mathbb{R}^+ e cuja função derivada, também de domínio \mathbb{R}^+ , está definida por

$$f'(x) = e^{\ln x + 2} - \ln x$$

Resolva, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, os itens seguintes.

- 2.1. Justifique que, no intervalo $]1, e[$, a equação $f'(x) = 10$ é possível.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às décimas.

- 2.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3. No conjunto \mathbb{C} , considere os seguintes números complexos:

$$w_1 = 2 - 2i; \quad w_2 = a - 5 + 3i, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}; \quad w_3 = 3i^{63};$$

$$w_4 = -2 \operatorname{cis} \frac{15\pi}{2}; \quad w_5 = \frac{7(-1 + \sqrt{3}i) \operatorname{cis} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{cis} \frac{7\pi}{24}}$$

Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes.

- 3.1. Num saco estão cinco bolas indistinguíveis ao tato, cada uma inscrita com um dos números anteriores. Alguém vai extrair todas as bolas, uma a uma numa ordem qualquer.

Qual é a probabilidade de as bolas que representam números imaginários puros saírem todos juntos, no início ou no fim da extração?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 3.2. Mostre que a imagem geométrica de $(w_1)^5$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

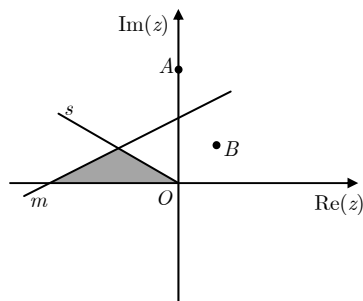
- 3.3. Determine o valor de a sabendo que $\frac{w}{w^2}$ é um número real.

4. Considere a seguinte figura no plano complexo:

Sabe-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 3i$
- o ponto B é a imagem geométrica do número complexo $z_2 = 1 + i$
- m é a mediatriz do segmento $[AB]$
- s é a semirreta de equação $\text{Arg}(z) = \theta$, sendo θ o argumento de uma das soluções da equação

$$z^3 + \overline{z_1} = 5i$$



Indique uma condição, em \mathbb{C} , para a zona a sombreado, incluindo as fronteiras.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10		Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0	
Grupo II (150 pontos)	1.....38 1.1.....17 1.2.....21	2.....38 2.1.....17 2.2.....21	3.....53 3.1.....21 3.2.....15 3.3.....17	4.....21