

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 1 (recorrente)

Módulo 8 – Introdução ao Cálculo Diferencial II

23/03/10

Duração: 90 minutos

Nome: _____ N.º: _____

Classificação:

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Para um certo valor positivo de k , é **contínua** em \mathbb{R} a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_5(k+x) & \text{se } x \leq -2 \\ \frac{4-x^2}{4x+8} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

2. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = e^{x^2} - 3$

Em qual dos intervalos seguintes se tem $h'(x) \leq 0$?

- (A) $]-\infty, 0]$ (B) $[0, +\infty[$ (C) $[-1, 0]$ (D) $[0, 1]$

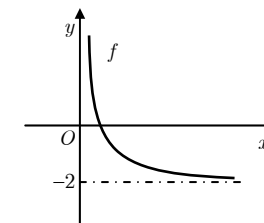
3. Na figura do lado está parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R}^+ .

Tal como a figura sugere, a recta de equação $y = -2$ é assíntota do gráfico de f .

Seja g a função de domínio \mathbb{R} definida por

$$g(x) = 9 - x^{1000} e^{-x}$$

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$

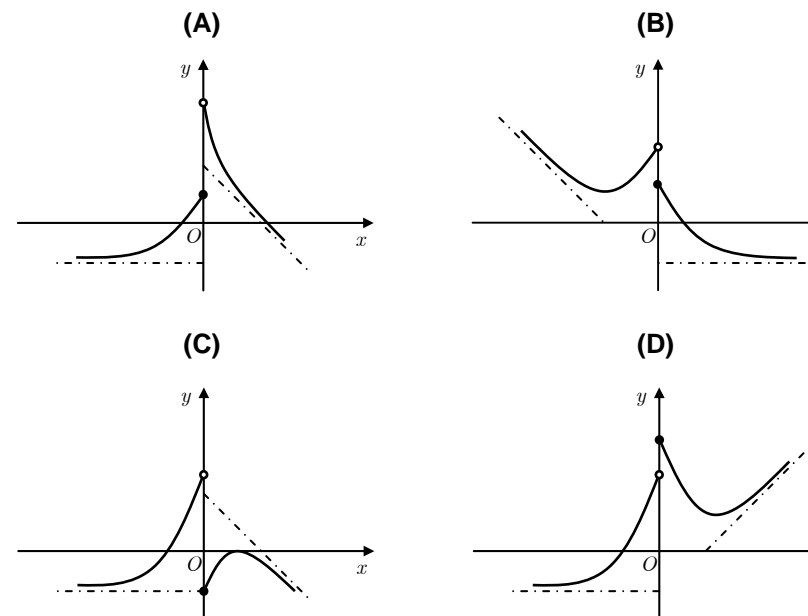


- (A) -18 (B) -9 (C) 0 (D) $-\infty$

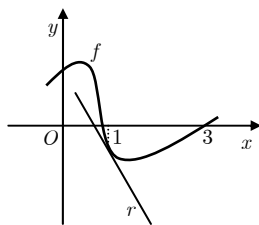
4. Considere uma função g , contínua em \mathbb{R} **excepto à esquerda** de 0, e tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

Qual dos seguintes pode representar o gráfico de g ?



5. Na figura estão representados:
- parte do gráfico de uma função f , derivável em \mathbb{R} ;
 - uma recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.



Qual pode ser o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$?

- (A) 1 (B) $f(0)$ (C) $f(3)$ (D) $\frac{1}{f(1)}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

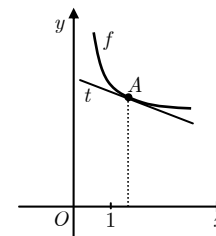
1. Considere a função, de domínio $\left] -\frac{1}{4}, +\infty \right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(4x+1)}{x} & \text{se } -\frac{1}{4} < x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2x^2+8x}{x^2+2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os itens seguintes.

- 1.1. Mostre que a função f é contínua em $x = 0$.
- 1.2. Determine as equações das assíntotas do gráfico de f , paralelas aos eixos coordenados.
2. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = e^x(x^2 + 4x - 4)$.
Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes:
- 2.1. Mostre que a função g tem pelo menos um zero em $]0, 1[$.
- 2.2. Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando as suas abscissas, caso existam.

3. 3.1. Na figura ao lado, está parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 3 - \frac{\ln(0,8x)}{x}$.



Além disso, está também representada a recta t tangente ao gráfico de f no ponto A , de abscissa maior que 1.

Sabendo que a recta t tem declive $-0,4$, determine a abscissa do ponto A .

Percorra os seguintes passos:

- mostre que $f'(x) = \frac{\ln(0,8x)-1}{x^2}$;
- traduza a questão formulada por meio de uma equação;
- **recorrendo à calculadora**, resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abscissa do ponto A ;
- Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

- 3.2. “- Temos aqui um período de trinta anos. Um terço do século durante o qual as temperaturas declinaram.”

ESTADO DE PÂNICO, Michael Crichton

Suponha agora que a função f , no intervalo $[1, 8]$, representa a temperatura, em graus Celsius, numa localidade após x horas. Sabe-se que $f(1)$ representa um valor aproximado da temperatura nessa localidade às 9 horas da manhã.

Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), determine a que horas foi registada a temperatura mínima nesse intervalo de tempo. Apresente o resultado em horas e minutos (com minutos arredondados às unidades).

Nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

4. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \sqrt{x^2+8000}$.

Prove que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota do gráfico de h .

5. “(...) quando os computadores do Centro Nacional de Informações sobre Terramotos registaram uma perturbação sísmica atípica originada na bacia do Pacífico, mesmo ao Norte das ilhas Salomão, com 6,3 na escala de Richter.”

ESTADO DE PÂNICO, Michael Crichton

A magnitude M de um sismo (na escala de *Richter*) e a energia total E libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação $\ln E = 3,44M + 11,17$

A energia E é medida em Joule.

- 5.1. O sismo que ocorreu na região de Maule (norte do Chile), no dia 27 de Fevereiro de 2010, teve magnitude 8,8, na escala de *Richter*.

Qual foi a energia, em Joule, libertada nesse sismo?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10.

Apresente o valor de a arredondado às centésimas.

- 5.2. Curiosamente, o mais violento sismo ocorrido até hoje foi também no Chile, a 22 de Maio de 1960, e teve uma magnitude 9,5 na escala de *Richter*.

Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas, respectivamente, pelos sismos de 1960 e de 2010.

Recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, determine $\frac{E_1}{E_2}$, com

aproximação às unidades, e interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....32	2.....34	3.....34	4.....16	5.....34
	1.1.....16	2.1.....16	3.1.....18		5.1.....16
	1.2.....16	2.2.....18	3.2.....16		5.2.....18