



4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º ano (alternativo)

26/02/10

Duração: 90 minutos

Nome: _____ N.º: _____ Classificação:

O professor: _____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. “Mesmo que a probabilidade de sucesso fosse pequena, ainda era uma probabilidade. Uma hipótese.”
ESTADO DE PÂNICO, Michael Crichton

Em relação a um grupo de alunos do ensino recorrente, sabe-se que a sua idade, em anos, pode ser considerada uma variável bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 25 e desvio-padrão 2. Escolhido, ao acaso, um desses alunos, qual é, aproximadamente, a probabilidade de ele ter uma idade entre 27 e 29 anos?

- (A) 47,7% (B) 34,1% (C) 13,6% (D) 2,1%

2. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = e^{x^2} - 3$. Em qual dos intervalos seguintes se tem $h'(x) \leq 0$?

- (A) $]-\infty, 0]$ (B) $[0, +\infty[$ (C) $[-1, 0]$ (D) $[0, 1]$

3. Para um certo valor positivo de k , é **contínua** em \mathbb{R} a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_5(k+x) & \text{se } x \leq -2 \\ \frac{4-x^2}{4x+8} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

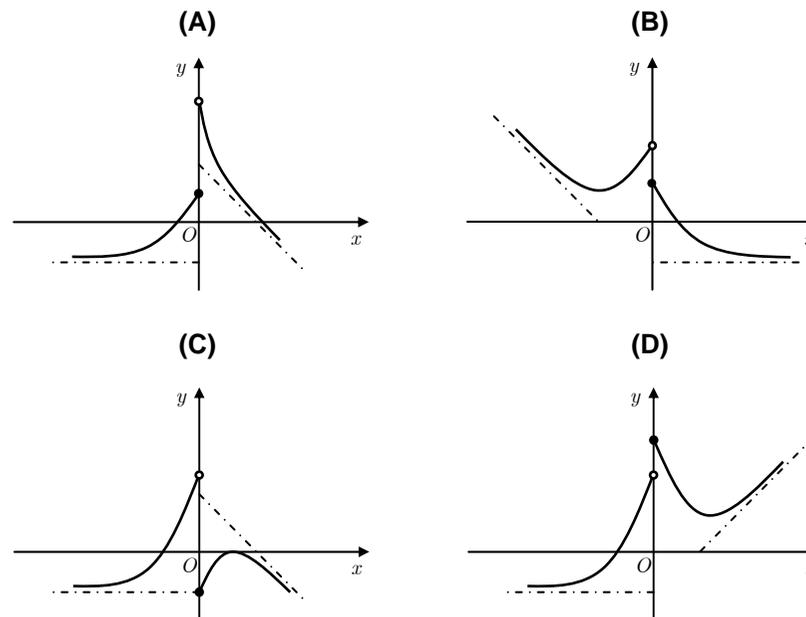
Qual é o valor de k ?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

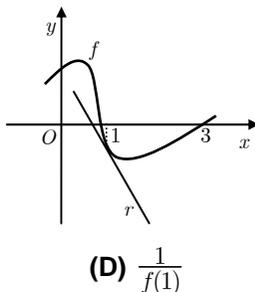
4. Considere uma função g , contínua em \mathbb{R} **excepto à esquerda** de 0, e tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

Qual dos seguintes pode representar o gráfico de g ?



5. Na figura estão representados:
- parte do gráfico de uma função f , derivável em \mathbb{R} ;
 - uma recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.



Qual pode ser o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$?

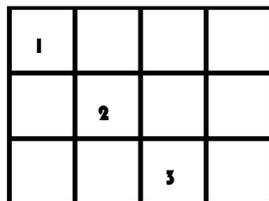
- (A) 1 (B) $f(0)$ (C) $f(3)$ (D) $\frac{1}{f(1)}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura ao lado, encontra-se um rectângulo formado por doze quadrados iguais distribuídos por três linhas e quatro colunas. Assim, pode-se preencher cada um dos doze quadrados com um número natural de 1 a 12. Admita que os números são dispostos ao acaso. Como se pode ver na figura, já lá estão os números 1, 2 e 3.

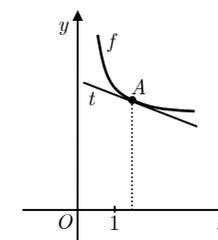


- 1.1. De quantas maneiras podemos numerar os outros 9 quadrados, com os restantes 9 números?
- 1.2. De quantas maneiras podemos numerar os outros 9 quadrados, com os restantes 9 números, de modo que na primeira coluna fiquem só números ímpares? Recorde que nessa linha já lá está o número 1.

2. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = e^x(x^2 + 4x - 4)$.
Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes:

- 2.1. Mostre que a função g tem pelo menos um zero em $]0, 1[$.
- 2.2. Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando as suas abcissas, caso existam.

3. 3.1. Na figura ao lado, está parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 3 - \frac{\ln(0,8x)}{x}$.



Além disso, está também representada a recta t tangente ao gráfico de f no ponto A , de abscissa maior que 1.

Sabendo que a recta t tem declive $-0,4$, determine a abscissa do ponto A .

Percorra os seguintes passos:

- mostre que $f'(x) = \frac{\ln(0,8x)-1}{x^2}$;
- traduza a questão formulada por meio de uma equação;
- **recorrendo à calculadora**, resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abscissa do ponto A ;
- Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

- 3.2. Suponha agora que a função f , no intervalo $[1, 8]$, representa a temperatura, em graus Celsius, numa localidade após x horas. Sabe-se que $f(1)$ representa um valor aproximado da temperatura nessa localidade às 9 horas da manhã.
Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), determine a que horas foi registada a temperatura mínima nesse intervalo de tempo. Apresente o resultado em horas e minutos (com minutos arredondados às unidades).
 Nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

4. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \sqrt{x^2+8000}$.

Prove que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota do gráfico de h .

5. Considere a função, de domínio $]-\frac{1}{4}, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(4x+1)}{x} & \text{se } -\frac{1}{4} < x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2x^2+8x}{x^2+2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os itens seguintes.

- 5.1. Mostre que a função f é contínua em $x = 0$.
- 5.2. Determine as equações das assíntotas do gráfico de f , paralelas aos eixos coordenados.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....34	2.....34	3.....34	4.....16	5.....32
	1.1.....16	2.1.....16	3.1.....18		5.1.....16
	1.2.....18	2.2.....18	3.2.....16		5.2.....16