# 4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

## 12.º 2

2.º Período | 26/02/07 | Duração: 90 minutos

www.esaas.com

Nome: ______________________________ N.º: _____ Classificação: ☐☐ , ☐

O professor:

---

## Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

**1.** Uma empresa vai admitir novas carrinhas, sendo a selecção feita de entre doze candidatas: seis de caixa aberta e seis de caixa fechada.

Devido à natureza do trabalho, vão ser compradas ou duas carrinhas de caixa aberta ou três de caixa fechada. De quantas maneiras diferentes podem ser feitas as escolhas?

**(A)** ${}^{7}C_2$ **(B)** ${}^{7}C_3$ **(C)** ${}^{6}C_2$ **(D)** ${}^{6}C_3$

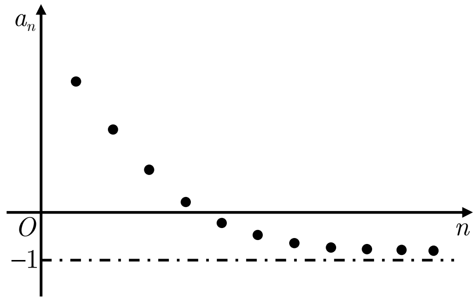
**2.** Numa cidade com 5000 habitantes, sabe-se que o número de pessoas infectadas com um tipo de vírus da gripe é dado, $t$ dias após a contagem, por uma função do tipo

$g(t) = \frac{A}{1+Be^{-Ct}}$ , com $A$ , $B$ e $C$ constantes positivas.

Além disso, sabe-se também que, no pior dos casos, metade da população pode ficar infectada pelo vírus.
Ao escolher, ao acaso, um habitante dessa cidade oito dias depois, qual é a probabilidade de ele estar infectado com o vírus?

**(A)** $\frac{B}{A}$ **(B)** $\frac{g(8)}{A}$ **(C)** $\frac{A}{5000}$ **(D)** $\frac{g(8)}{5000}$

**3.** Considere a sucessão $(a_n)$ representada graficamente ao lado.
Como sugere a figura, $(a_n)$ é estritamente decrescente e o seu gráfico admite a assimptota de equação $y=-1$.




Considere ainda a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Quanto ao limite de $f(a_n)$:

**(A)** É igual a $0$ **(B)** É igual a $-\infty$ **(C)** É igual a $+\infty$ **(D)** Não existe

**4.** *"Um dividir-por-zero (…) O CMD é calculado como uma fracção… a despesa total dividida pelo número de decifrações. (…) Quando o denominador é zero – explicou Midge – o quociente chega ao infinito. Os computadores detestam infinitos, de modo que escrevem noves seguidos."*

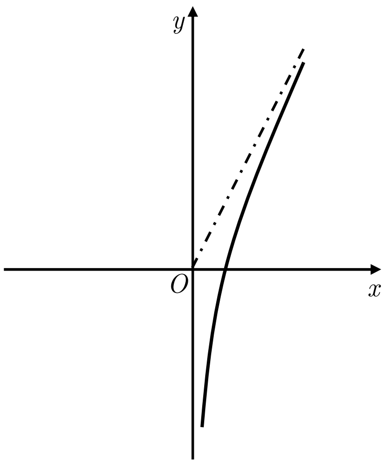
FORTALEZA DIGITAL, Dan Brown

Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$.

**(A)** $\frac{e}{2}$ **(B)** $e$ **(C)** $0$ **(D)** $1$

**5.** Na figura ao lado está **parte do gráfico** da função $g$, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Sabe-se que:

- $g$ é uma função par;
- A recta de equação $y = 2x$ é uma assimptota do gráfico de $g$.




Sejam $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - 2x\right]$ e $b = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

**(A)** $a = 2$ e $b = -2$ **(B)** $a = 2$ e $b = 2$

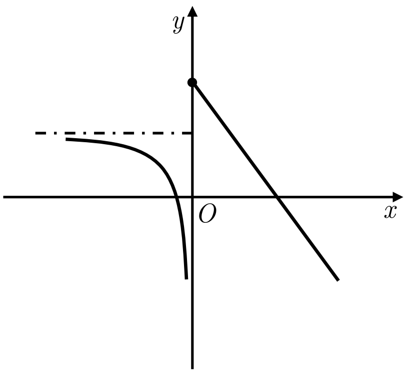
**(C)** $a = 0$ e $b = -2$ **(D)** $a = 0$ e $b = 2$

**6.** Sobre uma função $h$, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

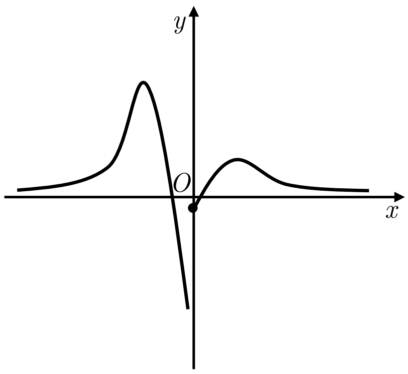
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$;
- O seu gráfico admite apenas duas assimptotas: $x = k$ e $y = k$, sendo $k$ um número real.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $h$ num referencial o.n.?

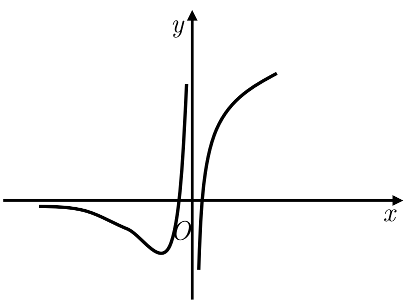
**(A)**



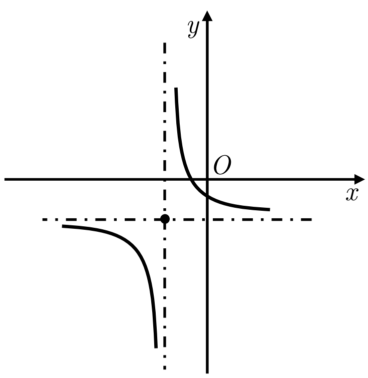

**(B)**




**(C)**




**(D)**



## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

**1.** *"O homem inseriu a placa no leitor de cartões e ligou o instrumento.*
*- Experimenta todas as combinações possíveis – explicou."*

O TERCEIRO GÉMEO, Ken Follet

O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0559.

**1.1.** Quantos códigos diferentes existem com um e um só algarismo zero?

**1.2.** Admita que o código de um certo cartão multibanco tem os dois primeiros algarismos diferentes.
Qual é a probabilidade de esse código representar um número *capicua*?
Apresente o resultado na forma de dízima.

**2.** O formaldeído é um gás cáustico, incolor e cancerígeno, que pode ser libertado por diversos tipos de móveis novos.
Suponha que um certo aparelho mediu a concentração, em microgramas por metro cúbico ($\mu g/m^3$), de formaldeído presente numa habitação. Suponha ainda que essa concentração foi dada, após $t$ dias, por

$$C(t) = 8 + \frac{28\ln(t+k)}{t+1}, \quad t \geq 0,$$

sendo $k$ uma constante real.

**2.1.** **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva as duas alíneas seguintes.

**2.1.1.** Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

**2.1.2.** Supondo que, após o sexto dia, a concentração de formaldeído presente na habitação foi igual a $17\ \mu g/m^3$, determine o valor de $k$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

**2.2.** Admita agora que $k = 4$.

**2.2.1.** Determine a concentração de formaldeído presente na habitação após duas semanas.
Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.

**2.2.2.** Segundo uma associação de defesa do consumidor, a concentração de formaldeído presente na habitação:

- não deve nunca ser superior a $100\ \mu g/m^3$;
- deve, após 28 dias, ser inferior a $10\ \mu/m^3$.

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar se:

- a concentração de formaldeído obedece ao primeiro critério, indicando o seu máximo;
- a concentração de formaldeído obedece ao segundo critério, indicando a partir de que dia essa concentração é inferior a $10\ \mu/m^3$.

Numa pequena composição (com cinco a dez linhas), explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas (arredondadas às décimas) de pontos relevantes.

**3.** Considere a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2}}{-x-1} & \text{se } x < -2 \\ \frac{x^3+2x^2}{4-x^2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$.

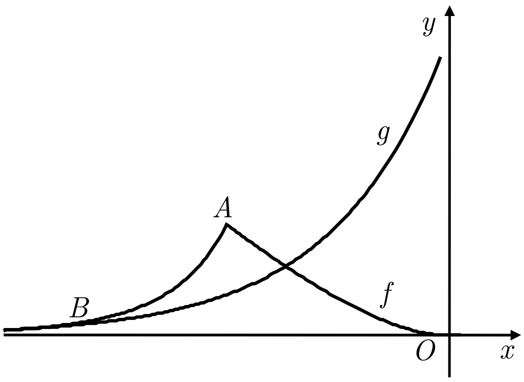
**Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes.

**3.1.** Mostre que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$

**3.2.** Estude a função $f$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

**3.3.** Na figura estão representados, em referencial o.n. $xOy$, partes dos gráficos das funções $f$ e $g$, definida por $g(x) = e^{x+1}$

- O ponto $A$ tem abcissa $-2$ ;
- O ponto $B$ é um dos pontos de intersecção entre os gráficos de $f$ e de $g$.




Determine a abcissa de $B$.

**Nota:** tenha em conta que $x + 1 = x + 2 - 1$.

**4.** Seja $f$ uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, cujo gráfico admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes pares. Seja ainda $h$ uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e tal que $h(x) = f(x) + 2x \ln\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$.

Prove que o gráfico de $h$ admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

FIM

## Formulário

| **Limites notáveis** | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ |
| | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$ |

## COTAÇÕES

| Grupo I (54 pontos) | Cada resposta certa: + 9 | Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0 |
|---|---|---|

| Grupo II (146 pontos) | | | |
|---|---|---|---|
| 1........23 | 2........55 | 3........53 | 4........15 |
| 1.1........10 | 2.1.1........14 | 3.1........16 | |
| 1.2........13 | 2.1.2........14 | 3.2........21 | |
| | 2.2.1........11 | 3.3........16 | |
| | 2.2.2........16 | | |

O professor: RobertOliveira