

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

Nome: _____ N.º: _____ Classificação: ,
 O professor: _____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Considere as seguintes seis figuras geométricas:



Escolhe-se uma figura ao acaso. Sejam os acontecimentos:

A : “A figura escolhida é um polígono”

B : “A figura escolhida está pintada de preto”

C : “A figura escolhida não é um triângulo”

Qual é o valor de $P(A | (B \cap C))$?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

2. “- Cerca de um terço dos prisioneiros [de Dachau] eram judeus – respondi. – Os outros eram comunistas, homossexuais, testemunhas de Jeová, alguns alemães com princípios.”

O PROJECTO JANUS, Philip Kerr

Um terço das pessoas de visita a uma certa prisão são do sexo masculino.

Se forem escolhidas seis visitas ao acaso dessa prisão, qual é a probabilidade (arredondada às centésimas) de pelo menos uma ser do sexo masculino?

- (A) 0,64 (B) 0,73 (C) 0,82 (D) 0,91

3. Considere a função g de domínio \mathbb{R} definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \log_2(3x+2) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes se pode aplicar o teorema de Bolzano?

- (A) $[0, 3]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $[-1, 2]$ (D) $[-1, 1]$

4. De uma função f de domínio e contínua em \mathbb{R}^+ , sabe-se que o seu gráfico admite a assíntota de equação $y = x - 4$

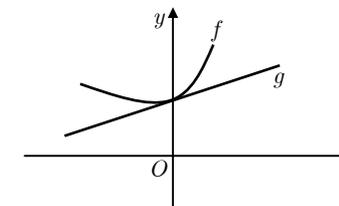
Qual é a proposição **falsa**?

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$
 (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 4) = 0$
 (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
 (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5. Considere ao lado parte dos gráficos das funções f e g , ambas de domínio \mathbb{R}

Tal como a figura sugere, o gráfico de g é uma recta que é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0

Sabendo que $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$, qual é o valor de $(f \times g)'(0)$?



- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{9}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. O binário de um automóvel é a energia produzida pelo seu motor em cada rotação da cambota e serve para provocar o movimento das rodas do veículo.
Admita que o binário de um modelo do *Peugeot 406* é dado, em *Newtons metro*, pela função definida por



$$b(x) = 132x + 660 \ln(1 - 0,1x)$$

x representa o número de rotações por minuto, em milhares, da cambota do motor, $x \in [0, 8[$

- 1.1. Quando o número de rotações por minuto passa de 1000 para 4500, o binário aumenta. Determine o valor desse aumento, apresentando o resultado em *Newtons metro* arredondados às unidades.

Nota: Se proceder a arredondamentos, use aproximações às centésimas.

- 1.2. Usando processos exclusivamente analíticos, determine o número de rotações por minuto da cambota que maximiza o binário deste modelo do *Peugeot 406*.

2. Sejam g e g' as funções, ambas de domínio \mathbb{R} , e tais que apenas se conhece a expressão de g' :

$$g'(x) = x e^{-2x}$$

- 2.1. O gráfico da função g tem dois pontos onde a taxa de variação é igual a 0,1
Recorrendo à calculadora, determine as abcissas desses pontos.
Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente os valores pedidos arredondados às centésimas.
- 2.2. Sem usar a calculadora, estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3. Considere a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 2x + \frac{\ln(x)}{x}$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os itens seguintes.

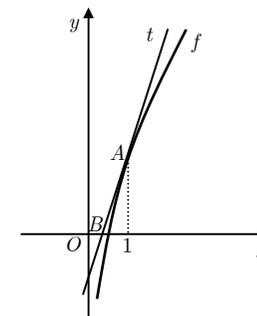
- 3.1. Justifique que, no intervalo $]1, e[$, o gráfico de f intersecta a recta de equação $y = 5$ em pelo menos um ponto.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às décimas.

- 3.2. Estude a função f quanto à existência de assintotas do seu gráfico.

- 3.3. Considere o referencial o.n. xOy ao lado em que estão representados:

- parte do gráfico de f
- a recta t , tangente ao gráfico de f no ponto A , de abcissa 1
- o ponto B , de intersecção da recta t com o eixo Ox



Determine a abcissa de B

4. De uma função f , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que:

- f é derivável em \mathbb{R}
- o ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence ao gráfico de f
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = -\frac{1}{3}$

Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = [f(x)]^3$

Prove que a recta tangente ao gráfico de g em $x = 0$ é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

FIM
COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....35 1.1.....15 1.2.....20	2.....35 2.1.....15 2.2.....20	3.....60 3.1.....20 3.2.....20 3.3.....20	4.....20
--------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--	----------