Escola Secundária de Francisco Franco (2010/2011)

www.esffranco.edu.pt

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5/7

2.º Período 30/03/11 Duração: 90 minutos

Nome: N.º: Classificação: ,

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Foram analisadas vários quilogramas de pão tendo-se verificado uma média $1,2$ gramas de sal por cada 100 gramas de pão.

Admita que a variável «gramas de sal por cada 100 gramas de pão» segue uma distribuição normal cujo desvio padrão é $0,1$

Sabe-se que, em Portugal, a quantidade máxima de sal permitido é $1,4$ gramas de sal por cada 100 gramas de pão.

Ao escolher um pão qualquer da amostra, qual é a probabilidade aproximada de ele ter uma quantidade de sal que ultrapasse o máximo permitido?

(A) $1,1\%$ **(B)** $2,3\%$ **(C)** $15,9\%$ **(D)** $21,2\%$

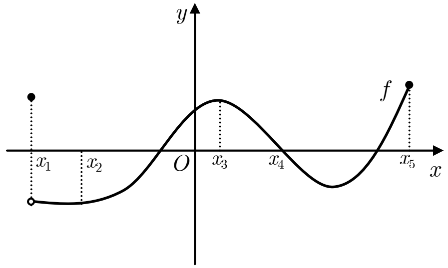
2. *"As minhas probabilidades de avistar Wolfgang Stumpff aumentavam se circulasse pelo centro de Munique, onde havia muito mais pessoas a embarcar e a desembarcar. Por vezes, ser detective envolve trabalho de estatística e cálculo das probabilidades."*

O PROJECTO JANUS, Philip Kerr

Um autocarro chegou a um ponto de paragem com vinte pessoas, oito dos quais do sexo masculino. Vão sair nessa paragem seis pessoas ao acaso.
Qual é a probabilidade (arredondada às centésimas) de haver apenas dois passageiros do sexo masculino de entre os seis que vão sair?

(A) $0,02$ **(B)** $0,17$ **(C)** $0,36$ **(D)** $0,44$

3. Na figura está o gráfico da função f de domínio $[x_1, x_5]$



Em qual dos intervalos se pode aplicar o corolário do teorema de Bolzano?

(A) $[x_1, x_3]$ **(B)** $[x_2, x_3]$ **(C)** $[x_3, x_5]$ **(D)** $[x_4, x_5]$

4. De uma função f contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é estritamente crescente
- $f(1) = 0$
- O gráfico de f admite duas assimptotas, sendo uma a bissectriz dos quadrantes ímpares

Qual é a proposição **falsa**?

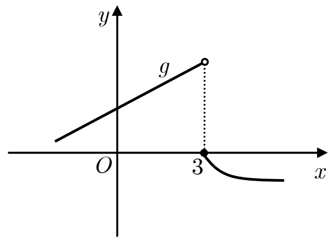
(A) O contradomínio de f é $]0,+\infty[$

(B) O contradomínio de f é $]-5,+\infty[$

(C) $y = -1$ é a equação de uma assimptota do gráfico de f

(D) $y = -2$ é a equação de uma assimptota do gráfico de f

5. Considere, ao lado, parte do gráfico da função g de domínio $\mathbb{R}$
Qual é a proposição que pode ser verdadeira?



(A) $g'(3^-) = -\infty$ e $g'(3^+) = 2$

(B) $g'(3^-) = -\infty$ e $g'(3^+) = -2$

(C) $g'(3^-) = +\infty$ e $g'(3^+) = 2$

(D) $g'(3^-) = +\infty$ e $g'(3^+) = -2$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. *"Ela possuía uma bela figura, proporcionada. Senti-me como Kepler a admirar a sua Secção Dourada."*

O PROJECTO JANUS, Philip Kerr

Admita que os custos de armazenamento de uma empresa que se dedica a compra e venda de ouro são dados, em centenas de euros, pela função definida por

$$C(x) = 6 - x\,e^{-0{,}2x}$$

x representa o peso do ouro, em quilogramas, $x \in [0, 20]$

1.1. Quando o peso de ouro armazenado passa de 1000 para 2300 gramas, os custos diminuem. Determine o valor dessa diminuição, apresentando o resultado em centenas de euros arredondados às centésimas.

Nota: Se proceder a arredondamentos, use aproximações às centésimas.

1.2. Usando processos exclusivamente analíticos, determine o peso de ouro, em quilogramas, que minimiza o custo de armazenamento da empresa.

2. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + \dfrac{x}{e^x}$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos,** os itens **2.1.** e **2.2.**

2.1. Justifique que, no intervalo $]0, 1[$, o gráfico de f intersecta a recta de equação $y = 3$ em pelo menos um ponto.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às décimas.

2.2. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.3. Considere agora a função, também de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = 3 - 8x^2$$

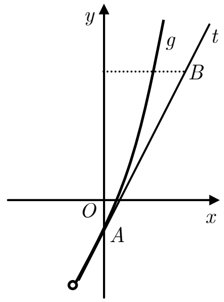
Os gráficos de ambas as funções intersectam-se. **Recorrendo à calculadora**, determine todas as abcissas do(s) ponto(s) de intersecção.
Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente os valores pedidos arredondados às centésimas.

3. Sejam g e g' as funções, ambas de domínio $]-1, +\infty[$, e tais que apenas se conhece a expressão de g': $g'(x) = (x+1)\ln(x+1) + 2$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos,** os itens seguintes.

3.1. Considere o referencial o.n. xOy ao lado em que estão representados:

- parte do gráfico de g
- a recta t, tangente ao gráfico de g no ponto $A(0, -1)$
- o ponto B da recta t



Sabe-se que a abcissa de B é solução da equação $g'(e-1) = 6x$

Determine a ordenada de B

3.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é derivável em $\mathbb{R}$
- o ponto de coordenadas $(1, -1)$ pertence ao gráfico de f
- a bissectriz dos quadrantes pares é tangente ao gráfico de f em $x = 1$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

Prove que a recta tangente ao gráfico de g em $x = 1$ é horizontal.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	**1.**....35 **1.1.**....15 **1.2.**....20	**2.**....55 **2.1.**....20 **2.2.**....20 **2.3.**....15	**3.**....40 **3.1.**....20 **3.2.**....20	**4.**....20