Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2006/2007)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 5

www.esaas.com

2.º Período 04/03/08 Duração: 90 minutos

Nome: ____________ N.º: ____ Classificação: ____ , ____

O professor:

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. *"- Os rapazes devem ter uns vinte ou vinte e dois anos. A rapariga não sei. Provavelmente é da mesma idade (…)"*

ÚLTIMO ACTO EM LISBOA, Robert Wilson

Em relação a um grupo de alunos de uma universidade, sabe-se que a sua idade, em anos, pode ser considerada uma variável bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 20. Além disso, sabe-se também que há 15% de alunos com idades entre os 20 e os 22 anos.
Sejam:

- N_1 o número de alunos com idade superior a 22 anos;
- N_2 o número de alunos com idade inferior a 22 anos;
- N_3 o número de alunos com idades entre os 18 e os 20 anos.

Qual é a proposição verdadeira?

(A) $N_2 < N_3$ **(B)** $N_1 < N_3$ **(C)** $N_1 > N_2$ **(D)** $N_1 < N_2$

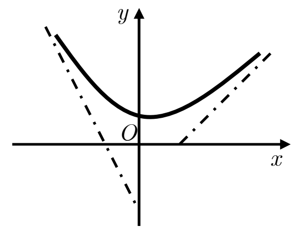
2. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é igual a 11. Qual é o elemento central dessa linha?

(A) 210 **(B)** 252 **(C)** 330 **(D)** 462

3. Qual é o domínio da função definida por $g(x) = \log_3(1 - x^2)$?

(A) $]-1,1[$ **(B)** $]-1,+\infty[$ **(C)** $]-\infty,1[$ **(D)** $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

4. Na figura ao lado está parte do gráfico de uma função h. Tal como a figura sugere, esse gráfico admite duas assimptotas oblíquas.
Qual pode ser a proposição verdadeira?



(A) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = 2$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = -1$

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 1$ **(D)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = -1$

5. De uma função f, **contínua** em $[0,5]$, sabe-se que:

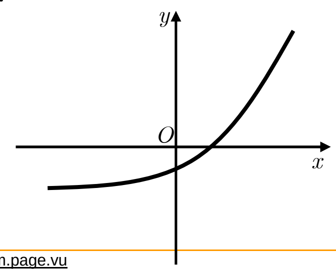
- $f(0) = f(5) > 0$;
- $f(0) + f(1) = 0$.

O teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero:

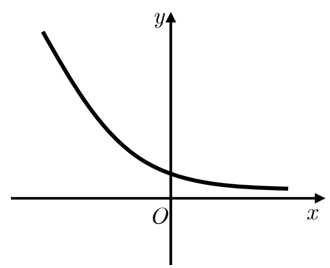
(A) No intervalo $]0,1[$ mas não no intervalo $]1,5[$
(B) No intervalo $]1,5[$ mas não no intervalo $]0,1[$
(C) Nos intervalos $]0,1[$ e $]1,5[$
(D) No intervalo $]-1,0[$

6. Considere uma função g, **crescente** em $\mathbb{R}$. Qual dos gráficos seguintes **não pode** representar o da **primeira derivada** de g ?

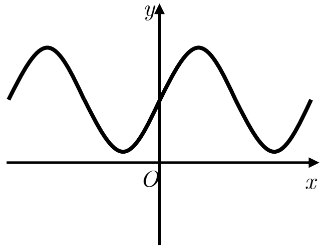
(A)



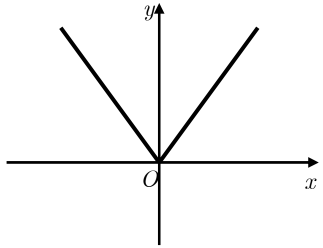
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. *“Chupou com força uma cabeça de camarão, lambeu os lábios, limpou-os e bebeu três quintos da cerveja em três goles.”*

ÚLTIMO ACTO EM LISBOA, Robert Wilson

Considere o seguinte problema:

Vinte amigos pediram uma bebida (cada um) num bar. Sabe-se que três quintos deles pediram cervejas.
Ao escolher, ao acaso, cinco dos amigos, qual é a probabilidade de haver, no mínimo, quatro amigos que pediram cerveja?

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{8\times{}^{12}C_4+{}^{12}C_5}{{}^{20}C_5}$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.

Nota: Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

2. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left(x^2 - 4x\right)e^{x-2}$.

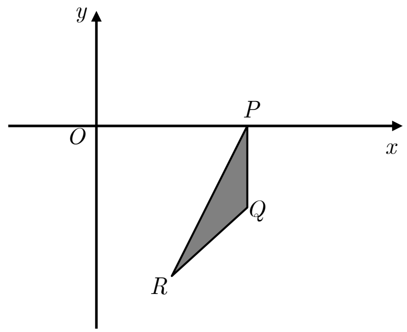
2.1. Para um certo valor de k entre 0 e 4, sabe-se que é contínua a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \le k \\ x - 2 & \text{se } x > k \end{cases}$$

Usando a calculadora, determine o valor de k (arredondada às centésimas). Explique como procedeu.

2.2. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, um triângulo $[PQR]$ em que:

- P é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox;
- Q tem a mesma abcissa de P e pertence à recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0;
- R é o ponto de intersecção entre os gráficos de f e $f\,'$.



Determine, sem recorrer à calculadora, a área do triângulo $[PQR]$.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Determine a abcissa de P;*
- *Escreva a função derivada de f;*
- *Indique as coordenadas de Q;*
- *Calcule a área pedida.*

3. Seja $g:]-1,+\infty[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1. Mostre que o gráfico de g admite uma só assimptota paralela aos eixos coordenados.

3.2. Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

4. O número de caixas Multibanco em Portugal pode ser dado, t anos após a data da sua implementação em 1985, pela função definida por

$$m(t) = \frac{12390}{1 + 1031,5e^{At}} \quad , \quad A < 0$$

4.1. Em 1985, a rede Multibanco começou com apenas algumas caixas em Lisboa e no Porto. Quantas eram?

4.2. De acordo com a SIBS (Sociedade Interbancária de Serviços), em 1995 havia já 3745 caixas Multibanco em Portugal. Nestas condições, **indique** a equação que traduz este problema.
Sem usar a calculadora (excepto para cálculos numéricos), resolva essa equação e conclua que $A \simeq -0,61$. Se usar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

5. Seja a um número real maior do que 1 e seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^{2x}$.
Mostre que:

Se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x^2 + 2x} = 2$, então $a = e^2$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (146 pontos)	1..........15	2..........41 2.1....18 2.2....23	3..........38 3.1....18 3.2....20	4..........34 4.1....14 4.2....20	5..........18