



Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2008/2009)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

www.ebsaas.com

2.º Período

27/02/09

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação: ,

O professor: _____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. “Encontrava-se a meio da colunata quando um negro de estatura média, com carapinha branca a condizer com a sua gravata branca, de rosto retinto e solene a condizer com o fato imaculadamente preto, se lhe dirigiu.”

O HOMEM, Irving Wallace

A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

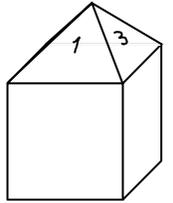
x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\log_a \left(\frac{4}{3} \right)$	$\log_a \left(\frac{3}{2} \right)$	$\log_a \left(\frac{3}{2} \right)$

(a representa um número real superior a 1).

Qual é valor médio desta variável aleatória?

- (A) $2 - \log_3 8$ (B) $3 - \log_3 8$ (C) $2 - \log_5 8$ (D) $3 - \log_5 8$

2. Na figura está representado um poliedro com nove faces que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Pretende-se numerar as nove faces do poliedro, com os números de 1 a 9 (um número diferente em cada face). Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3. Qual é a probabilidade de numerar as restantes faces de maneira a que, nas faces da pirâmide, fiquem só números inferiores a 7?



- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$

3. Considere a função h de domínio \mathbb{R} definida por

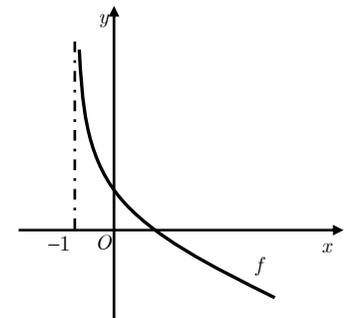
$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{3x} & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x+1}{3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h no ponto de abcissa 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) É contínua à direita e descontínua à esquerda
 (B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
 (C) É contínua à esquerda e à direita
 (D) É descontínua à direita e à esquerda

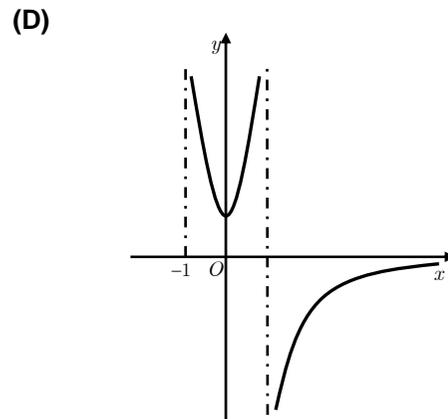
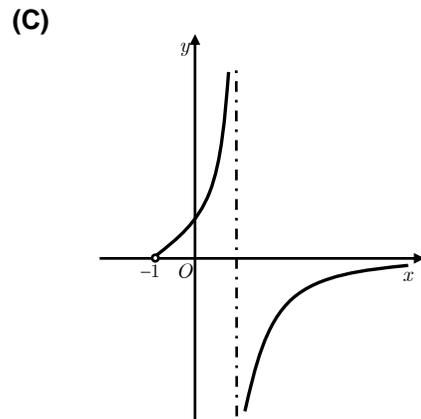
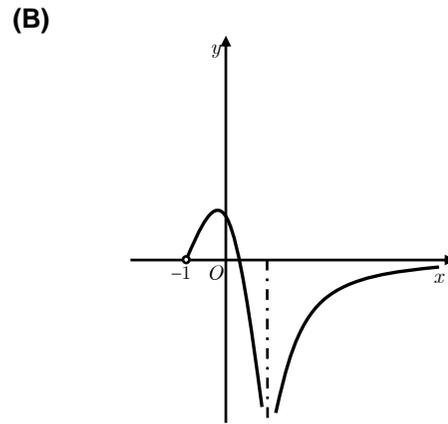
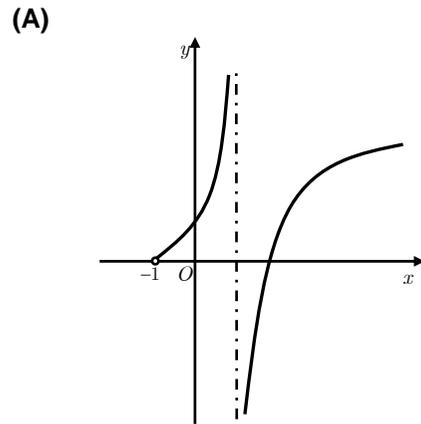
4. Na figura está representada, em referencial xOy , parte do gráfico de uma função f , de domínio $] -1, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio. Tal como a figura sugere, tem-se que:

- A função f tem um zero positivo;
- A recta de equação $x = -1$ é assíntota do gráfico de f .

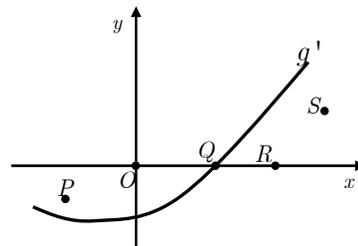


Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial xOy , parte do gráfico

de $\frac{1}{f}$?



5. Seja g uma função de domínio \mathbb{R} , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de g' , **função derivada** de g , bem como alguns pontos. Sabendo que a origem do referencial pertence ao gráfico de g , quais dos pontos dados podem também pertencer ao gráfico de g ?



(A) P, Q e R (B) Q, R e S (C) P e Q (D) R e S

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Depois de ser detectada, prevê-se que o número de doentes (em milhares de indivíduos) devido a uma epidemia de gripe seja dado, nas próximas seis semanas, pela função definida por

$$d(t) = 2 + 4t^2 e^{-t}, \text{ com } t \text{ em semanas, } t \in [0, 6]$$

1.1. Usando **processos analíticos** (e a calculadora para cálculos numéricos), determine o número máximo de doentes previstos, segundo este modelo. Apresente o resultado em milhares de indivíduos, arredondado às milésimas.

1.2. Recorra à calculadora para resolver o seguinte problema:

“Segundo este modelo, poderá o número de doentes ser superior a 3000 durante mais de um mês?”

Apresente, na sua resposta:

- o(s) gráfico(s) necessário(s) à resolução do problema em $[0, 6]$;
- o(s) ponto(s) necessário(s) à resolução do problema bem como a(s) sua(s) abcissa(s), arredondada(s) às centésimas.

2. Seja g a função de domínio $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ definida por $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

2.1. Estude o gráfico da função g quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

2.2. Mostre, aplicando o **Teorema de Bolzano**, que a equação $g(x) = 3 - x$ é possível no intervalo $]2, 3[$.

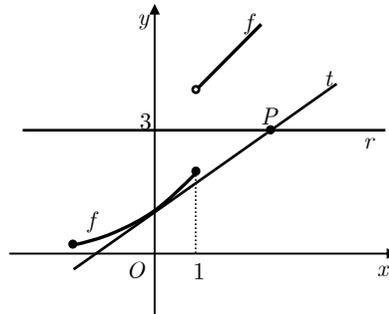
3. É dada a função de domínio $[-2, +\infty[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{0,7x} & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ x + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Na figura está representada parte do gráfico da função f .

Tal como a figura sugere:

- r é a recta de equação $y = 3$;
- t é a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0;
- P é o ponto de intersecção entre as rectas r e t .



Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva os três itens seguintes:

- 3.1. Como se pode ver na figura, 3 está entre $f(1)$ e $f(2)$ mas a equação $f(x) = 3$ não é possível em $[1, 2]$.
Estará este resultado em contradição com o teorema de Bolzano? Justifique a resposta.
- 3.2. Usando a definição de derivada num ponto, mostre que $f'(0) = 0,7$.
- 3.3. Determine a abscissa de P .

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ e derivável também em \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = \ln(x^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prove que, se $f'(x) = f(x)$, então tem-se $x \ln x = 1$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa, + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada, 0
-------------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....41	2.....38	3.....49	4.....22
	1.1.....22	2.1.....19	3.1.....13	
	1.2.....19	2.2.....19	3.2.....18	
			3.3.....18	