



Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2006/2007)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

www.esaas.com

2.º Período

11/03/08

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação: ,

0 professor:

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A , B e C três acontecimentos possíveis de Ω tais que:

- A e $B \cap C$ são acontecimentos equiprováveis e incompatíveis;
- $P(B) = P(C) = 0,4$;
- $P(B \cup C) = 0,5$.

Qual é o valor de $P[A \cup (B \cap C)]$?

- (A) 0,2 (B) 0,4 (C) 0,6 (D) 0,8

2. O quarto elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é solução da equação $33! \times 3!x = 36!$.

A que é igual a soma dos dois primeiros elementos dessa linha?

- (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39

3. “Carlos leu-me no domingo um artigo sobre as nossas reservas [de ouro] terem septuplicado durante a guerra.”
ÚLTIMO ACTO EM LISBOA, Robert Wilson

É dada a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = 7^{\ln x}$.

Qual é a abcissa do ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual a 49?

- (A) e (B) e^2 (C) $\ln 7$ (D) $\ln 49$

4. Seja h a função definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^{x^2-1}} & \text{se } x < -1 \\ 4 & \text{se } x = -1 \\ 5 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

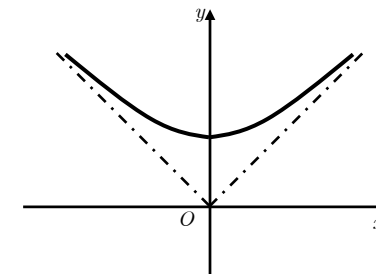
A função h é descontínua para:

- (A) $x = -1$ e $x = 4$ (B) $x = -1$ e $x = 1$
(C) $x = -1$ (D) $x = 1$

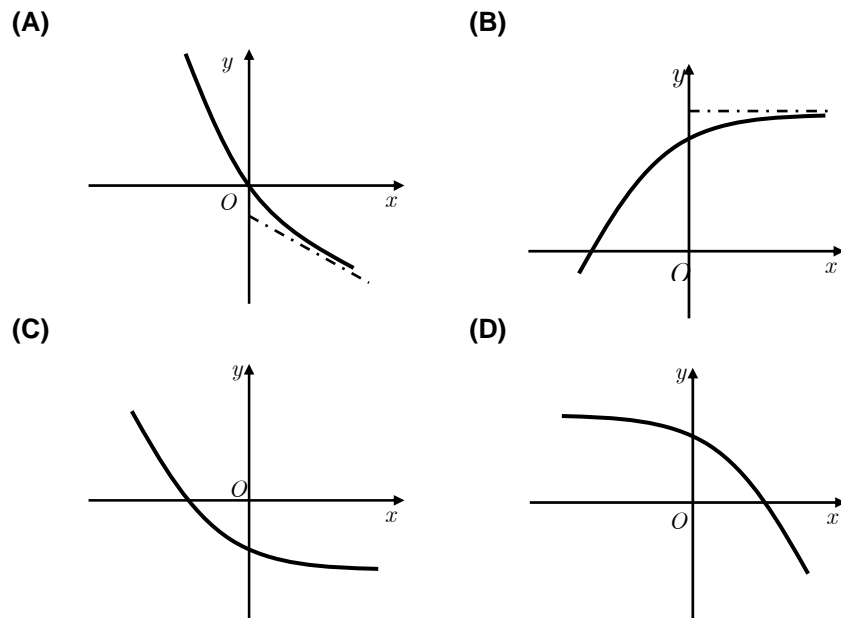
5. A função f , par e derivável em \mathbb{R} , está representada ao lado. Como a figura sugere, 0 é um minimizante de f e as bissetrizes dos quadrantes par e ímpar são assíntotas do gráfico de f .

Assim, podemos concluir que:

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$
(B) $f'(0) = 1$
(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 2$
(D) $f'(0) = -1$



6. Considere uma função g , derivável em \mathbb{R} , e em que $g'(x) \times g''(x) < 0$. Qual dos gráficos seguintes **não pode** representar a função g ?



Grupo II

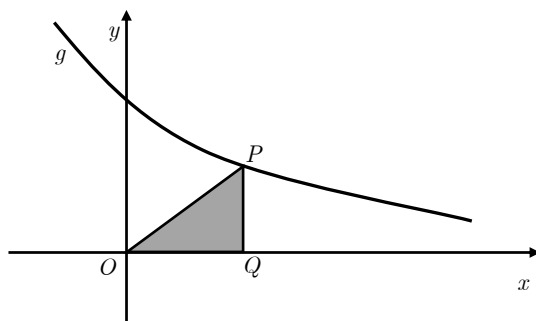
Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura estão representados:
- parte do gráfico da função g de domínio \mathbb{R} , definida

por $g(x) = 2^{-x}$;

- um triângulo **rectângulo** $[OPQ]$, em que:
 - O é a origem do referencial;
 - P é um ponto do gráfico de g ;
 - Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o P ponto se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de g . O ponto Q acompanha o movimento do ponto P , deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que o triângulo $[OPQ]$ é sempre rectângulo no ponto Q .

Seja A a função, de domínio \mathbb{R}^+ , que faz corresponder, à abcissa x do ponto P , a área do triângulo $[OPQ]$.

- 1.1. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = x \cdot 2^{-x-1}$.
- 1.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função A quanto à monotonia e conclua que há um valor de x para o qual é máxima a área do triângulo $[OPQ]$.
- 1.3. O conjunto solução da inequação $A(x) \geq 0,2$ é um intervalo fechado $[a, b]$.
Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b , arredondados às centésimas. **Interprete** a solução no contexto do problema.

Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

2. Seja h uma função, de domínio \mathbb{R}^+ , tal que a sua **derivada** é dada por $h'(x) = \frac{2-\ln x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:
 - 2.1. Seja r a recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1. Seja P o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox . Sabendo que $h(1) = 4$, determine a abcissa do ponto P .
 - 2.2. Estude a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3. Considere a seguinte **propriedade**:
Seja f uma função contínua num intervalo $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Se $f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ têm sinais contrários, então f tem pelo menos um zero em $]a, +\infty[$.

Usando esta propriedade, prove que tem pelo menos um zero em \mathbb{R}^+ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2 \ln(x+1)}{x} - x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

4. Uma mulher foi assassinada. A Polícia Judiciária, usando a Lei de NEWTON do arrefecimento de um corpo, sabe que a temperatura, t horas após a morte, é dada, em graus Celsius, pela função definida por:

$$f(t) = 20 + 17e^{-0,14t}$$

- 4.1. Qual era a temperatura da mulher quarenta e cinco minutos após a sua morte? Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.
- 4.2. O corpo foi descoberto às 3 horas da manhã de um certo dia e a temperatura do corpo da mulher marcava 24,6 graus Celsius.

Sem recorrer à calculadora (excepto para eventuais cálculos numéricos), indique a que horas, aproximadamente, foi assassinada a mulher. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

Nota: Se usar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5. “O golpe fê-la cair para a frente e a testa bateu num objecto sólido que tem noventa por cento de probabilidades de ser uma árvore, mas verei melhor no instituto.”

ÚLTIMO ACTO EM LISBOA, Robert Wilson

Considere o seguinte problema:

Numa quinta há 500 árvores, sendo 90% árvores de fruto. Escolhe-se, ao acaso, um grupo de 4 árvores. De quantas maneiras pode ser feita essa escolha se pelo menos uma delas for uma árvore de fruto?

Uma resposta correcta a este problema é: ${}^{500}C_4 - {}^{50}C_4$

Numa pequena composição explique porquê.

FIM COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	--------------------------	---

Grupo II (146 pontos)	1. 43	2. 36	3. 17	4. 35	5. 15
	1.1. 13	2.1. 18		4.1. 16	
	1.2. 15	2.2. 18		4.2. 19	
	1.3. 15				