

**3.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 5**

Duração: 90 minutos  
2.º Período - 2/02/05

Classificação:   ,

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

O professor: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. A função  $h$  está definida por  $h(x) = 2 - 5^x$ . Qual é a caracterização da função  $h^{-1}$ , **função inversa** de  $h$ ?

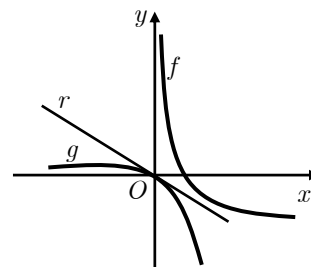
(A)  $h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, 2[$   
 $x \mapsto \log_5(2-x)$

(B)  $h^{-1}: ]-\infty, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \ln(2-x)$

(C)  $h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, 2[$   
 $x \mapsto \ln(2-x)$

(D)  $h^{-1}: ]-\infty, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \log_5(2-x)$

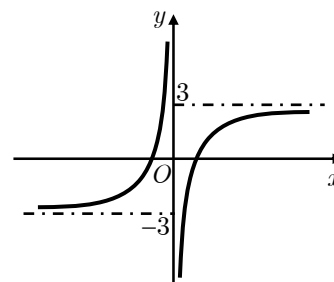
2. Ao lado estão representados os gráficos das funções  $f$  e  $g$ . A recta de equação  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$  e a recta  $r$  é tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(0,0)$ .



Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) \times f(x)}{x}$ ?

- (A) 0                      (B) -1                      (C)  $-\infty$                       (D)  $+\infty$

3. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função  $f$ , cujo domínio é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . As rectas de equações  $x = 0$ ,  $y = -3$  e  $y = 3$  são assíntotas do gráfico de  $f$ .



É dada a sucessão definida por  $u_n = \frac{n^3 - 80n + 5}{2n^2 + 6}$ .

Qual é o valor de  $\lim f(u_n)$ ?

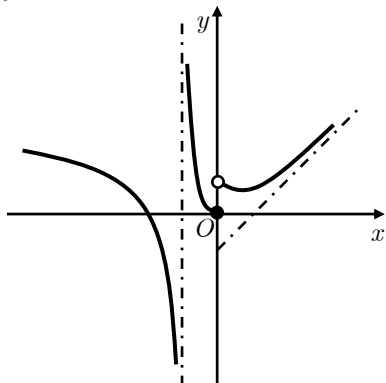
- (A) 3                      (B) -3                      (C) 0                      (D)  $+\infty$

4. De uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  e **descontínua** em  $x = 0$ , sabe-se que:

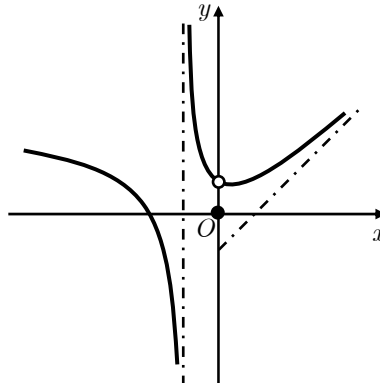
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x + 1] = 0$$

Dos gráficos seguintes, **apenas um** não pode representar o gráfico de  $g$ . Indique-o.

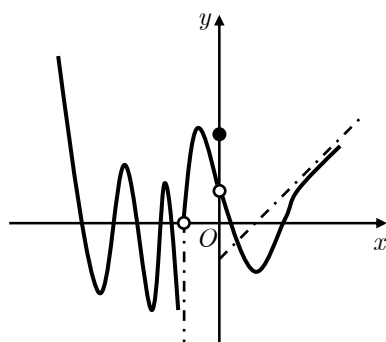
(A)



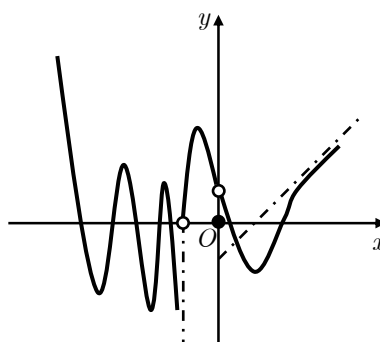
(B)



(C)



(D)



5. Admita que, numa certa criação de peixes em viveiro, a variável “*peso dos peixes*” segue uma distribuição aproximadamente normal. Escolhendo ao acaso um dos peixes dessa criação, sabe-se que os acontecimentos “*ter peso superior a 1,8 kg*” e “*ter peso inferior a 1,2 kg*” são **equiprováveis**.

Sejam  $\bar{x}$  e  $\sigma$ , respectivamente, a média e o desvio padrão da variável.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A)  $\bar{x} - \sigma = 1,2$  e  $\bar{x} + \sigma = 1,8$

(B)  $\bar{x} = 1,5$  e  $\sigma = 0,3$

(C)  $\bar{x} = 1,5$

(D)  $\sigma = 0,3$

6. Seja  $S$  o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis e **incompatíveis** de  $S$ .

Sabe-se que:  $P(A \cup B) = 0,6$  e  $P(A) = 0,5 \times P(\bar{B})$ .

Qual é o valor de  $P(B)$ ?

(A) 0

(B) 0,2

(C) 0,4

(D) 0,6

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. O jovem Dário vai treinar-se para os próximos Jogos Olímpicos na modalidade de salto em comprimento. O seu treinador propôs um método de treino e concluiu que, após  $t$  meses, o Dário saltará, em metros, a distância definida pela função  $d(t) = \ln \frac{t+5}{1100} + 11,5$ ,  $t \in [0, 36]$ .

Considere que o instante  $t = 0$  corresponde a Janeiro de 2005.

- 1.1. De acordo com este modelo, quantos metros saltará o Dário em Janeiro de 2006? Apresente o resultado arredondado às centésimas.
- 1.2. Use a calculadora para determinar  $d'(5)$ . Interprete a solução no contexto do problema.
- 1.3. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

*No decorrer de que mês o Dário estará a saltar a uma distância de 8 metros?*

Na sua resposta, indique o mês e o ano.

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 1.4. O conjunto solução da inequação  $d(t) \leq 3t - 0,2t^2$  é um intervalo fechado  $[a, b]$ . Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para  $a$  e  $b$ , arredondados às centésimas.

**Nota:** apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

- 1.5. O Dário costuma ir com a sua namorada no autocarro para o treino. Eles gostam muito de ir atrás, onde há seis lugares sentados. Num certo dia, o motorista comunica-lhes que apenas há dois lugares vagos lá atrás (mas que eles desconhecem quais são). Qual é a probabilidade de eles irem lado a lado?

2. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2-1}{x^2-1} & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \frac{x^2-1}{e^{x+1}} & \text{se } x > -1 \end{cases}$

Usando métodos exclusivamente **analíticos**, resolva as três alíneas seguintes.

- 2.1. Estude a continuidade de  $f$  no ponto de abcissa  $x = -1$ .

**Nota:** Deve indicar, justificando, se a função  $f$  é contínua em  $x = -1$  e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.

- 2.2. Estude  $f$  quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico em  $\mathbb{R}^+$ .

- 2.3. Prove que  $f$  tem pelo menos um zero em  $]0, 2[$ .

3. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^-$  e tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2] = 0$ .

Seja  $g$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^-$  e tal que  $g(x) = f(x) - x$ .

Prove que o gráfico da função  $g$  admite uma assíntota perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares.

FIM

## Formulário

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

## COTAÇÕES

<b>Grupo I (6 valores)</b>	Cada resposta certa: + 1	Cada resposta errada: - 0,2	Cada questão não respondida ou anulada: 0
--------------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

<b>Grupo II (14 valores)</b>	<b>1</b> ..... <b>7,7</b>	<b>2</b> ..... <b>4,8</b>	<b>3</b> ..... <b>1,5</b>
	<b>1.1</b> ..... <b>1,4</b>	<b>2.1</b> ..... <b>1,6</b>	
	<b>1.2</b> ..... <b>1,4</b>	<b>2.2</b> ..... <b>1,6</b>	
	<b>1.3</b> ..... <b>1,7</b>	<b>2.3</b> ..... <b>1,6</b>	
	<b>1.4</b> ..... <b>1,7</b>		
	<b>1.5</b> ..... <b>1,5</b>		