

3.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2

Duração: 90 minutos
1.º Período - 4/02/05

Classificação: ,

Nome: _____

N.º: _____

O professor: _____

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Ao lado está parte do gráfico da função h , positiva em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

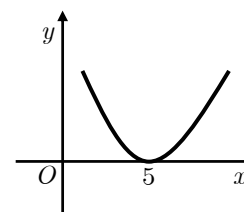
Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(0,1x)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$

(B) $+\infty$

(C) 0

(D) 5



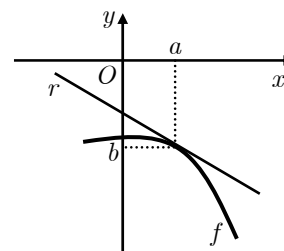
2. Ao lado estão representados o gráfico da função f e a recta r , tangente a ele no ponto (a, b) . Qual pode ser a equação de r ?

(A) $y = ax - a$

(B) $y = ax + a$

(C) $y = bx - a$

(D) $y = bx + a$



3. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f , cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. As rectas de equações $x = 0$ e $y = 3$ são assíntotas do gráfico de f .

É dada a sucessão definida por $u_n = \frac{n^2 - 80n + 5}{2n^3 + 6}$.

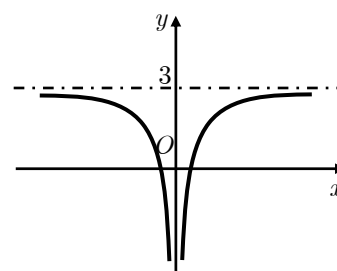
Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 3

(B) 0

(C) $-\infty$

(D) $+\infty$

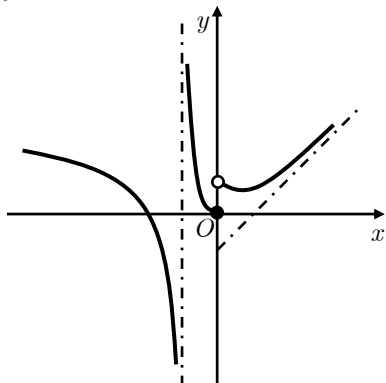


4. De uma função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e **descontínua** em $x = 0$, sabe-se que:

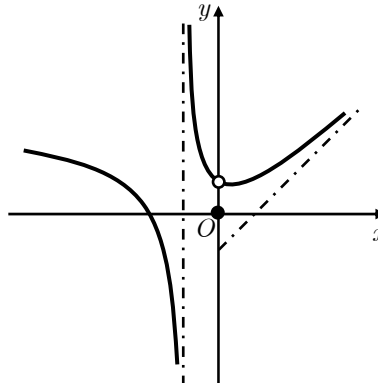
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x + 1] = 0$$

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g ?

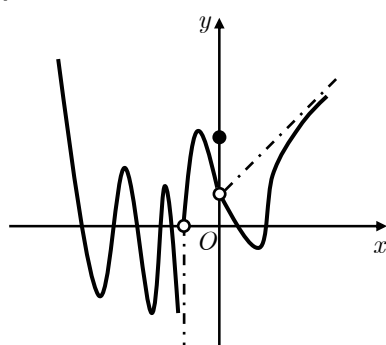
(A)



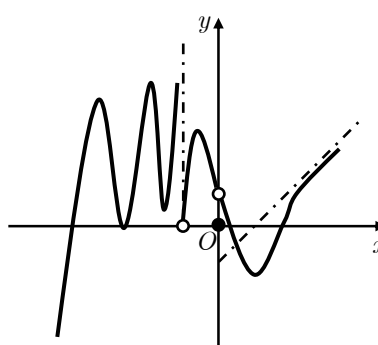
(B)



(C)



(D)



5. Em cada cinco remates à baliza, o andebolista Anselmo marca quatro golos (em média). Seja X a variável “número de golos marcado pelo Anselmo em cada dois remates”.

Qual é a distribuição de probabilidades de variável X ?

(A)

| | | |
|--------------|---------------|---------------|
| x_i | 1 | 2 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

(B)

| | | |
|--------------|---------------|---------------|
| x_i | 1 | 2 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

(C)

| | | | |
|--------------|-------------------|---|-------------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $P(X = x_i)$ | $(\frac{4}{5})^2$ | $2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}$ | $(\frac{1}{5})^2$ |

(D)

| | | | |
|--------------|-------------------|---|-------------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $P(X = x_i)$ | $(\frac{1}{5})^2$ | $2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}$ | $(\frac{4}{5})^2$ |

6. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis e **independentes** de S .

Sabe-se que: $P(A \cup B) = 0,6$ e $P(A) = 0,5$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 0,1

(B) 0,15

(C) 0,2

(D) 0,25

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. A Associação “Bem-estar” vai organizar um baile e, para isso, pretende arrendar uma sala. No entanto, a capacidade máxima dessa sala é de duzentas pessoas pelo que, se vierem mais, é necessário arrendar uma outra sala, contígua à primeira.

Admita que a função que representa o lucro esperado pela Associação após o baile, se vierem x **centenas**

de pessoas, é dada por
$$f(x) = \begin{cases} -175x^3 + 675x^2 - 500 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 155x \ln(5x) & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases} \quad (f \text{ vem em euros})$$

- 1.1. Qual é o lucro da Associação “Bem-estar” se vierem ao baile trezentas e cinquenta pessoas? Apresente o resultado arredondado aos cêntimos do euro.

- 1.2. Recorra à calculadora para resolver o seguinte problema:

Com quantas pessoas a Associação espera ter um lucro de € 750?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

Apresente o(s) valor(es) pedido(s) arredondado(s) às unidades.

- 1.3. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

1.3.1. Determine $f'(1)$. Interprete a solução no contexto do problema.

1.3.2. Verifique que, no ponto de abcissa $x = 2$, a função f é contínua **só** à esquerda desse ponto.

1.3.3. Prove que a equação $f(x) = 2000$ tem pelo menos uma solução em $]3, 5[$.

- 1.4. Durante o baile, o bar vai dispor de cinco tipos de bebidas alcoólicas e cinco tipos de refrigerantes. Suponha que, no balcão, vai estar uma bebida de cada tipo (todas as dez alinhadas lado a lado). Qual é a probabilidade de as bebidas alcoólicas ficarem dispostas alternadamente com os refrigerantes?

2. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = e^{3x+4}$.

2.1. Usando a definição de derivada num ponto, calcule $g'(0)$.

2.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x+3}$ quanto à existência de assintotas do seu gráfico.

3. Seja f uma função contínua em \mathbb{R} , cujo gráfico admite, no ponto de abcissa $x = 0$, uma recta tangente de equação $y = 5x + 2$.

Seja g uma função tal que
$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x=0 \end{cases}.$$

Prove que a função g é contínua em $x = 0$.

FIM

Formulário

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

COTAÇÕES

| | | | |
|--------------------------------|--------------------------|-----------------------------|---|
| Grupo I (6 valores) | Cada resposta certa: + 1 | Cada resposta errada: - 0,2 | Cada questão não respondida ou anulada: 0 |
|--------------------------------|--------------------------|-----------------------------|---|

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

| | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| Grupo II (14 valores) | 1 9,3 | 2 3,2 | 3 1,5 |
| | 1.1 1,4 | 2.1 1,6 | |
| | 1.2 1,6 | 2.2 1,6 | |
| | 1.3.1 1,6 | | |
| | 1.3.2 1,6 | | |
| | 1.3.3 1,6 | | |
| | 1.4 1,5 | | |