Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2002/2003)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 3

Duração: 90 minutos Classificação: ,
2.º Período – 10/02/03
Nome: N.º: O professor:

Grupo I

· As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.

· Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.

· Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.

· Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

· Não apresente cálculos.

1. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Tem-se que: $\mathrm{P}(A) = 20\%$, $\mathrm{P}(B) = 30\%$ e $\mathrm{P}(A \cup B) = 40\%$. Qual é o valor da probabilidade condicionada $\mathrm{P}(B|A)$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

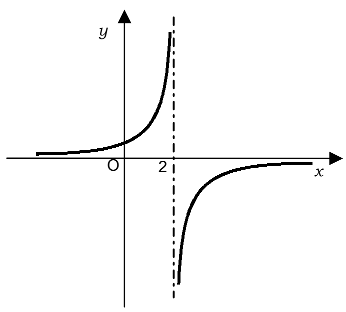
2. O código de um cartão multibanco é uma sequência de 4 algarismos. Admitindo que esse código é atribuído ao acaso, qual é a probabilidade de o código desse cartão ter os **quatro algarismos diferentes** e todos **diferentes de zero**?

(A) 0,1024 **(B)** 0,3024 **(C)** 0,5044 **(D)** 0,8124

3. Considere as funções g e h, de domínio R^+, definidas por $g(x) = \ln x$ e $h(x) = \log_2 x$. Qual é o conjunto solução da inequação $g(x) < h(x)$?

(A) $\varnothing$ **(B)** R^+ **(C)** $]0\,,1[$ **(D)** $]1\,,+\infty[$

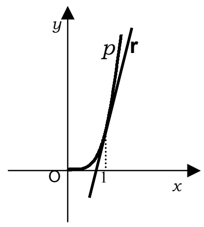
4. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathrm{R} \setminus \{2\}$. As rectas de equações $x = 2$ e $y = 0$ são assimptotas do gráfico de f. Seja (u_n) a sucessão tal que $u_n = 2 + e^{-n}$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?



(A) 0 **(B)** 2

(C) $+\infty$ **(D)** $-\infty$

5. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função p, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $p(x) = x^4$ e a recta **r**, tangente ao gráfico de p no ponto de abcissa 1. Qual é o declive da recta **r**?



(A) 6 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** 0

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um grupo de doze amigos, sete rapazes e cinco raparigas, estão a organizar um passeio para passarem juntos um fim-de-semana. Combinaram que seriam divididos em três grupos: um de três elementos que trataria do transporte, outro de quatro que trataria do alojamento e outro de cinco que trataria da alimentação.

1.1. Mostre que existem 27720 maneiras diferentes de se formarem os três grupos.

1.2. Supondo que os grupos são formados ao acaso, determine a probabilidade de o grupo encarregue do transporte ser formado só por rapazes.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$, definida por $f(x) = \frac{x^3+4x^2-8}{x^2-4}$. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as alíneas seguintes.

2.1. Calcule:

2.1.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.1.2. $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

2.2. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.3. Estude a continuidade, no ponto de abcissa $x=-2$, da função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < -2 \\ \ln\left(x^2-3\right) & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Nota: Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.

3. De duas funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right] = 0 \ (a \neq 0)$; a função g está definida por $g(x) = f(x) - x^2$;

Prove que o gráfico de g **não admite** assimptotas oblíquas.

4. A Câmara Municipal de Sacazul promoveu o lançamento, para este ano, da *Raspadinha*. O responsável pelo *marketing* prevê que o número de bilhetes B a serem vendidos (em **milhões de unidades**) é dada pela função definida por $B(x) = \ln e^{10} + \ln(x+2)^{10} - \ln(x+5)^{10}$, sendo x o valor do montante de prémios do jogo (**em centenas de milhares de euros**) e $x > 0$.

4.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

4.1.1. Verifique que $B(x) = 10\left(1 + \ln \frac{x+2}{x+5}\right)$

4.1.2. Prove que: $\exists c \in]3,10[: B(c) = 6$

4.2. Calcule e interprete $B(8)$. Apresente o resultado em milhões de bilhetes, arredondado às unidades.

4.3. Considere as seguintes questões:

1. *Será que o número de bilhetes vendidos ultrapassa, em algum momento, os 9 milhões? Se sim, qual é o valor dos prémios que a Câmara Municipal irá oferecer?*

2. *O responsável pelo marketing da Câmara de Sacazul acha que se deve aumentar, indefinidamente, o valor dos prémios da* Raspadinha*, pois assim o número de bilhetes tenderá a aumentar, também, indefinidamente. Terá ele razão? Ou há um limite, segundo este modelo matemático, no qual o número de bilhetes nunca ultrapassará?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenada(s) de ponto(s) (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **5**

Cada resposta certa .... + 1
Cada resposta errada .... − 0,2
Cada questão não respondida ou anulada 0
Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Grupo II **15**

1.....................**2,5**	**2.**....................**5,5**	**3.**....................**1,5**	**4.**....................**5,5**
1.1...........1,1	**2.1.1.**..........1,1		**4.1.1.**..........1,4
1.2...........1,4	**2.1.2.**..........1,4		**4.1.2.**..........1,4
	2.2...........1,6		**4.2.**..........1,3
	2.3...........1,4		**4.3.**..........1,4

O professor: RobertOliveira
internet: sm.page.vu
ou go.to/roliveira