Escola Secundária de Francisco Franco (2012/2013)

www.esffranco.edu.pt

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 13

2.º Período | 05/02/13 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis e compatíveis de Ω

Sabendo que $P(A) = 0,2$, qual dos números seguintes pode ser o valor de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

2. *"(…) o Presidente, que há pouco mais de um mês tinha mais ou menos dez por cento de vantagem, dispõe agora de cerca de um por cento, o que, como sabes, está bem dentro dos limites da margem de erro."*

CRIME NA CIDADE DE SAINTS REST, Thomas Gifford

Um clube tem 1500 sócios. Sabe-se que apenas 10% dos sócios têm perfil para serem eleitos para a presidência do clube, sendo metade mulheres.

Num certo dia, 20 sócios com perfil para presidente discutem a melhor estratégia para o clube.

Sabendo que eles são todos do mesmo sexo, qual é a probabilidade de serem mulheres?

(A) $\frac{2 \times {}^{75}C_{20}}{{}^{150}C_{20}}$ **(B)** $\frac{{}^{75}C_{20}}{{}^{150}C_{20}}$ **(C)** $\frac{20}{75}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. Um número real a é tal que gráfico da função definida por $f(x) = \log_3(6x + a)$ tem uma assíntota de equação $x = 5$

O ponto de ordenada 4 pertence ao gráfico de f

Qual é a sua abcissa?

(A) $\frac{17}{2}$ **(B)** $\frac{37}{2}$ **(C)** $-\frac{25}{6}$ **(D)** $-\frac{43}{6}$

4. Considere a função g, de domínio $]0,+\infty[\setminus\{1\}$, definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

Considere também a sucessão definida por $u_n = \sqrt{n+30} - \sqrt{n+20}$

Qual é o valor de $\lim g(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

5. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^3-5x^2-2x+16} & \text{se } x < 2 \\ \frac{1-e^{x-2}}{4x-8} + k & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Para um certo valor de k, sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

Qual é o valor de k ?

(A) $-\frac{2}{5}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $-\frac{4}{15}$ **(D)** $-\frac{3}{20}$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Um saco tem oito cartões, indistinguíveis ao tato, cada um inscrito com um número de 1 a 8.

1.1. Extraem-se, um de cada vez e **com reposição**, cinco cartões e põem-se sobre uma mesa pela ordem de saída.

Quantos números pares, com todos os algarismos diferentes, se podem escrever?

1.2. Admita agora que se extraem, simultaneamente, quatro cartões.

Considere os seguintes acontecimentos:

A : «*apenas um dos cartões extraído apresenta um número par*»

B : «*um dos cartões extraído apresenta o número 3*»

Determine, justificando, o valor de $P(A \mid B)$

Apresente o valor final na forma de fração irredutível.

2. O rendimento mensal da família Amendoeira pode ser dado, em euros, após t meses, pela função definida por

$$r(t) = 1850 + \frac{600}{4+2^{0,3t}}$$

(considere que $t = 0$ corresponde ao início de 2010)

2.1. Qual foi o rendimento mensal da família Amendoeira no início de outubro de 2009? Apresente o resultado em euros, arredondado às centésimas.

2.2. Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), responda à seguinte questão:

Segundo este modelo, em que altura o rendimento mensal da família Amendoeira foi igual a 1860 euros?

Indique o mês e o ano em que tal aconteceu.
Se usar cálculos intermédios, considere, pelo menos, três casas decimais.

3. O austríaco Felix Baumgartner (FB) realizou, em outubro de 2012, o salto mais alto feito por um ser humano. Ele foi levado por um balão até uma altitude de aproximadamente 39 quilómetros e depois fez um salto para a história.

Admita que, t segundos após o salto de FB e **até atingir a velocidade máxima**, a sua velocidade foi dada, em quilómetros por hora, por

$$v(t) = 240,27 \log_2 (t+1) \text{, sendo } 0 \leq t \leq 47$$

Sabe-se FB esteve 4 minutos e 22 segundos em queda livre. Suponha que a sua altitude foi dada, em quilómetros e após t segundos, por

$$a(t) = 40 - 0,12t - \ln(4t + 2,55) \text{, sendo } 0 \leq t \leq 262$$

3.1. Qual foi a velocidade máxima alcançada por FB?
Apresente o resultado em quilómetros por hora, arredondado às décimas.

3.2. Antes de alcançar a velocidade máxima, FB superou a velocidade do som (que é de 1110 quilómetros por hora em altitude, menor que a velocidade ao nível do solo).

Determine, sem usar a calculadora, o tempo que ele demorou a alcançar essa velocidade.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

3.3. Antes desta aventura, o maior salto que FB já tinha efetuado foi a $29\,610$ metros de altitude.

Segundo os dois modelos anteriores, houve um momento no qual FB atingiu essa altitude na descida. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a velocidade nesse momento.

Apresente, na sua resposta:

- a equação a resolver de modo a determinar o tempo que FB demorou a alcançar 29610 metros;
- o(s) gráfico(s) que relaciona(m) a altitude de FB e o tempo;
- o ponto do gráfico necessário à resolução do problema, bem como a sua coordenada relevante, com três casas decimais;
- a velocidade pedida, arredondada às décimas.

4. Seja h a função definida por $h(x) = x - 1 - \log_5(4 - 2x)$

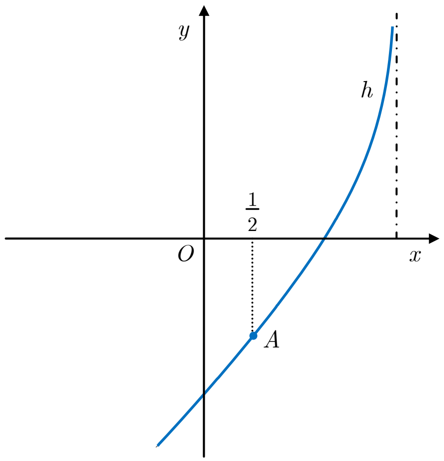
Usando métodos analíticos, resolva os itens seguintes.

4.1. Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem $h(x) \geq x + 1$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

4.2. Na figura ao lado encontra-se, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de h, assim como a assíntota do seu gráfico.

Tal como também se pode visualizar, há um ponto A pertencente ao gráfico de h de abcissa $\frac{1}{2}$



4.2.1. Mostre que a ordenada do ponto A é $\log_5\left(\frac{\sqrt{5}}{15}\right)$

4.2.2. Seja (x_n) uma sucessão de números reais tal que $\lim h(x_n) = +\infty$

Pelo menos uma das opções seguintes pode representar o termo geral da sucessão (x_n)

(A) $2 - n^{50} \cdot e^{-n}$

(B) $3 - \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$

(C) $\frac{2n - \ln(n)}{n}$

(D) $\frac{3n^3 + 8n^5}{9n^4 + 4n^5}$

Indique as opções que podem representar (x_n), justificando cada uma delas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	**1.**...........26 **1.1.**........10 **1.2.**........16	**2.**...........28 **2.1.**........10 **2.2.**........18	**3.**...........44 **3.1.**........10 **3.2.**........17 **3.3.**........17	**4.**...........52 **4.1.**........17 **4.2.1.**........17 **4.2.2.**........18

Formulário

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira
http://roliveira.pt.to