

Escola Secundária de Francisco Franco (2011/2012)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º ano

1.º Período

06/02/12

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Usando os algarismos 2, 3, 5 e 7, quantos números pares com seis algarismos e inferiores a meio milhão existem?

- (A) 256 (B) 512 (C) 768 (D) 1024

2. *“Pelo cálculo das probabilidades, não seria até mais plausível que, por uma questão de equilíbrio, pela lei das compensações, nos arriscássemos a gerar uns tantos imbecis causadores de futuros contratemplos (...) A realidade estatística diz-nos, inclusivamente, que nas famílias de baixa extracção, entre filhos de cavadores e porteiros, é possível surgirem advogados, engenheiros, médicos, políticos, certamente pela tal lei das compensações, num fenómeno cíclico de vaivém qualitativo, animador para as castas degradadas (...)”*

COCA-COLA KILLER, António Victorino D’Almeida

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de um espaço de resultados Ω tais que:

- A e \bar{A} são equiprováveis
- $P(A \cap B) = 0,1$

Além disso, a tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(A)$	$P(B A)$	k

(k designa um número real).

Qual é o valor de k ?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

3. Dado um número positivo a , sabe-se que $\log_{(4a)} 216 = 3$

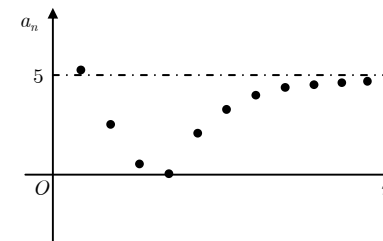
Qual é o valor de a ?

- (A) 2 (B) 2,5 (C) 1 (D) 1,5

4. Considere a sucessão (a_n) representada graficamente ao lado. Como sugere a figura, o gráfico dessa sucessão admite a assíntota de equação $y = 5$

Considere ainda a função definida de domínio $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ por $f(x) = \frac{e^{x-5}}{x-5}$

Quanto ao limite de $f(a_n)$:



- (A) Não existe (B) É igual a 0 (C) É igual a $+\infty$ (D) É igual a $-\infty$

5. Para um certo valor positivo de k , é contínua em \mathbb{R} a função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq k \\ \log_3(x^2 - 8x + 25) & \text{se } x > k \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

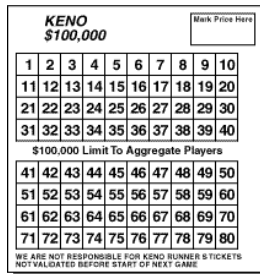
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1. O Keno é um jogo popular no estado de Nova Iorque. Consiste em comprar, por 1 dólar, um boletim com os números de 1 a 80 e, para jogar, um apostador assinala k desses números (sendo que $1 \leq k \leq 10$). Finalmente, a casa responsável do jogo sorteia, ao acaso, 20 dos 80 números e o objetivo do apostador é ter o maior número possível de acertos (de entre os k que assinalou).



1.1. Suponha que um apostador compra um boletim onde assinala 5 números, isto é, $k = 5$. Quantas apostas diferentes pode o apostador assinalar?

1.2. Admita agora que ao lado está uma tabela de prémios para quem comprar um cartão para assinalar 4 números. Justifique, numa pequena composição, que a probabilidade de o apostador não perder o dinheiro que apostou é dada por

N.º de acertos	Prémio a receber (em dólares)
4	120
3	4
2	1
1	0
0	0

$$\frac{{}^{20}C_4 + {}^{20}C_3 \times 60 + {}^{20}C_2 \times 60 \times {}^{60}C_2}{{}^{80}C_4}$$

2. Considere a função g , de domínio $[-4, +\infty[\setminus\{0\}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{2 - \sqrt{x+4}} & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ \frac{e^{kx} - 1}{3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ sendo } k \text{ um número real negativo.}$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as seguintes alíneas.

2.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2.2. Determine o valor de k de modo que exista $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

3. O número de utilizadores da popular rede social Facebook tem vindo a crescer desde que foi fundada. Um modelo matemático que dá o número de utilizadores registados, em milhões, pode ser dado, t anos após o final de 2004, pela função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 4,258e^{0,837t} & \text{se } 0 \leq t \leq 6 \\ 212,4(t-6) + 4,258e^{5,022} & \text{se } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$



3.1. De acordo com a empresa *iCrossing*, o número de utilizadores registados do Facebook poderá atingir os 1000 milhões em Agosto de 2012. O modelo matemático anterior prevê essa possibilidade? Justifique a resposta.

3.2. Sabe-se que até 2010, o número de utilizadores registado nesta rede social chegou a ultrapassar os 60 milhões. Segundo o modelo matemático dado, no decorrer de que ano isso aconteceu? Resolva o problema sem usar a calculadora, exceto para cálculos numéricos (em caso de arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais).

3.3. Usando processos analíticos, mostre que a função f é contínua em $t = 6$

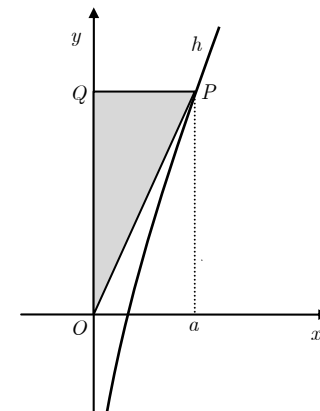
4. Seja h a função definida por $h(x) = \log_5(x^2) + 2x$ no domínio \mathbb{R}^+

4.1. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $h(x) \geq 2x + \log_5 x + \log_5(3-x)$

4.2. Na figura em baixo, encontra-se, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função h e um triângulo $[OPQ]$, retângulo em Q

Tal como a figura sugere, o ponto P pertence ao gráfico de h e o ponto Q pertence ao eixo Oy

Seja $a > 1$ a abcissa de P



- 4.2.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $a \log_5 a + a^2$
- 4.2.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de a de modo que a área do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 4

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar o ponto relevante para o problema;
- indicar a sua abcissa com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	---------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	125	229	349	447
	1.110	2.112	3.115	4.117
	1.215	2.217	3.217	4.2.115
			3.317	4.2.215