Escola Secundária de Francisco Franco (2009/2010)

www.esffranco.edu.pt

1.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 1 (recorrente)

Módulo 8 – Introdução ao Cálculo Diferencial II

11/02/10 **Duração: 90 minutos**

Nome: ______________________ **N.º:** ____ **Classificação:**

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \ln x - \ln\sqrt{x}$.
Qual das seguintes expressões pode também definir a função f ?

(A) $e^x - e^{\sqrt{x}}$ **(B)** $\ln(x-\sqrt{x})$ **(C)** $\frac{1}{4}\ln(x^2)$ **(D)** $\frac{1}{2}\ln x$

2. De uma função g de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que o seu gráfico admite uma única assimptota, de equação $x = 5$. Quais são as equações das assimptotas do gráfico da função definida por $f(x) = g(|x|)$?

(A) $x = 5$ e $y = 5$ **(B)** $x = -5$ e $y = -5$

(C) $y = -5$ e $y = 5$ **(D)** $x = -5$ e $x = 5$

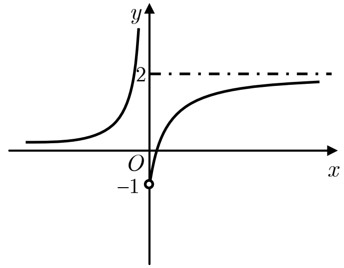
3. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1-e^x}$.

(A) 1 **(B)** 0 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

4. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Tal como a figura sugere, tanto os eixos coordenados como a recta de equação $y = 2$ são assimptotas do gráfico de f.
Considere as sucessões definidas por

$u_n = n^2$ e $v_n = \frac{1}{n}$.

Sendo $a = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ e $b = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, qual é a proposição verdadeira?

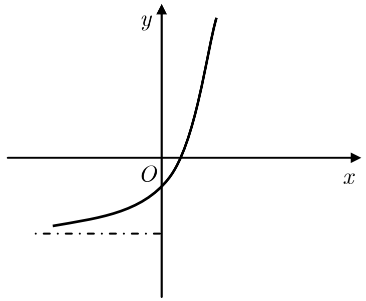


(A) $a = 2 \wedge b = +\infty$ **(B)** $a = 2 \wedge b = -1$

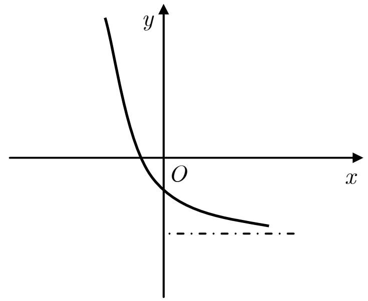
(C) $a = 0 \wedge b = +\infty$ **(D)** $a = 0 \wedge b = -1$

5. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \pi^x - 2$.
Qual das figuras seguintes pode ser parte do gráfico da função **inversa** de h ?

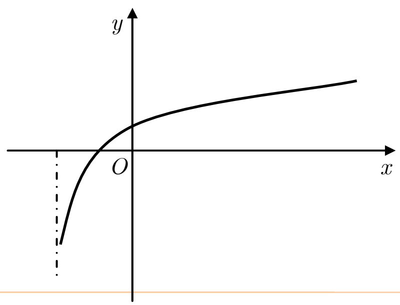
(A)



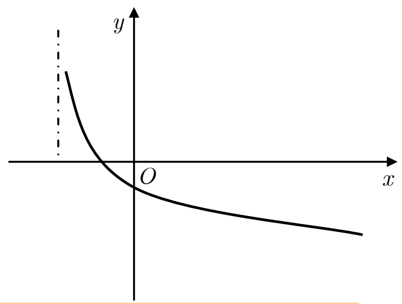
(B)



(C)



(D)



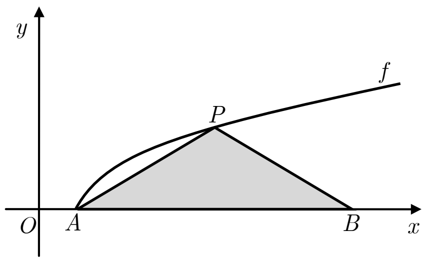
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. No referencial o.n. xOy da figura estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por
  $f(x) = \log_2 x$;
- um triângulo **isósceles** $[ABP]$ $\left(\overline{AP} = \overline{BP}\right)$, em que:
  - A é um ponto do gráfico de f e pertence ao eixo das abcissas;
  - B é um ponto do eixo das abcissas;
  - P é um ponto do gráfico de f.



Considere que o P ponto se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.

O ponto B acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{AP}$ permanece sempre igual a $\overline{BP}$.

Seja g a função, de domínio $]1, +\infty[$, que faz corresponder, à abcissa x do **ponto** $\boldsymbol{B}$, a **área** do triângulo $[ABP]$.

1.1. Mostre que, para cada $x \in]1, +\infty[$, se tem $g(x) = \dfrac{(x-1)\left[\log_2(x+1)-1\right]}{2}$.

1.2. Verifique que, se o ponto B estiver a 34 unidades de distância do ponto A, então a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $34\log_2 6 - 17$ unidades de área.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto que faz com que a área do triângulo $[ABP]$ seja igual a quatro unidades de área.

Traduza esta situação por meio de uma equação.

Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Indique a abcissa desse ponto com aproximação às centésimas.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Assinale o ponto em que se baseou para dar a sua resposta.

Testes de Matemática A do 12.º ano: enunciados e resoluções (2009/2010)

2. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_4\left(x^2 + 16\right) \geq 2 + \log_4\left(2x + 1\right)$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

3. *"A Smithsonian Institution, apesar de ter mais de uma dúzia de grandes museus no National Mall, tinha uma colecção tão extensa que só podia exibir dois por cento dela ao mesmo tempo. Os outros noventa e oito por cento da colecção tinham de ser armazenados algures."*

O SÍMBOLO PERDIDO, Dan Brown

O número de utentes que frequentaram um certo museu, em **milhares**, pode ser dado, t anos após o início da contagem, pela função definida por

$$f(t) = \frac{M}{1+2e^{-0,4t}} \quad (M \text{ é uma constante positiva})$$

Suponha que o valor de $t = 0$ corresponde ao final de 2005 e suponha também que foram contabilizados, no final desse ano, 10 mil utentes nesse museu.

3.1. Mostre que $M = 30$.

3.2. De acordo com este modelo, qual foi o número de utentes nesse museu no final de 2003? Apresente o resultado em milhares, arredondado às décimas.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

3.3. Durante o mesmo período, também o número de utentes de um outro museu (em milhares) foi dado, t anos após o início da contagem, pela função definida por

$$g(t) = \frac{25}{1+5e^{-t}}$$

Recorrendo à calculadora, resolva a condição $f(t) \leq g(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema. Apresente, na sua resposta, os gráficos utilizados bem como as coordenadas relevantes de pontos (arredondados às décimas).

4. O *Bugatti Veyron* é o automóvel mais rápido do mundo (e também o mais caro).

Admita que, t segundos após o *Bugatti* começar um teste de velocidade, esta é dada, em quilómetros por hora, por

$$v(t) = 407\left(1 - e^{-0{,}11t}\right).$$

4.1. Determine a velocidade do *Bugatti Veyron* um minuto após o início do teste. Apresente o resultado em quilómetros por hora, arredondado às unidades.

4.2. **Sem usar a calculadora** (excepto para cálculos numéricos), calcule o tempo que o *Bugatti* demora a atingir os cem quilómetros por hora. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)				
	1................................48 **1.1.**...........16 **1.2.**...........16 **1.3.**...........16	**2.**...............................20	**3.**...............................50 **3.1.**...........14 **3.2.**...........18 **3.3.**...........18	**4.**...............................32 **4.1.**...........14 **4.2.**...........18

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$

(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$\left(\rho \operatorname{cis} \theta\right)^n = \rho^n \operatorname{cis}\left(n\theta\right)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$