Escola Secundária de Francisco Franco (2009/2010)

www.esffranco.edu.pt

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º ano (alternativo)

04/02/10 **Duração: 90 minutos**

Nome: ______________________ **N.º:** ____ **Classificação:**

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. *"Katherine examinou os números, espantada com todas as combinações."*

O SÍMBOLO PERDIDO, Dan Brown

Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, paus, copas e ouros.
De um baralho completo extraem-se, simultaneamente, quatro cartas.
Qual é a probabilidade de serem todas do mesmo naipe?

(A) $\frac{{}^{13}C_4 \times 4}{{}^{52}C_4}$ **(B)** $\frac{{}^{13}C_2 \times 4}{{}^{52}C_4}$ **(C)** $\frac{13 \times 4}{{}^{52}C_4}$ **(D)** $\frac{13^4 \times 4}{{}^{52}C_4}$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	100	200
$P(X = x_i)$	a	$0{,}64$

(a designa um número real)

Determine o valor médio de X.

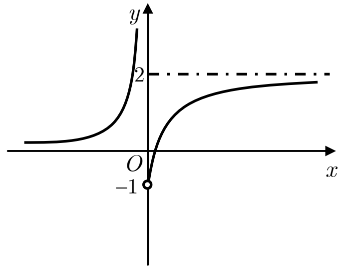
(A) 150 **(B)** 164 **(C)** 228 **(D)** 236

3. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \ln x - \ln \sqrt{x}$.
Qual das seguintes expressões pode também definir a função f?

(A) $e^x - e^{\sqrt{x}}$ **(B)** $\ln(x - \sqrt{x})$ **(C)** $\frac{1}{4}\ln(x^2)$ **(D)** $\frac{1}{2}\ln x$

4. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Tal como a figura sugere, tanto os eixos coordenados como a recta de equação $y = 2$ são assimptotas do gráfico de f.
Considere as sucessões definidas por

$u_n = n^2$ e $v_n = \frac{1}{n}$.

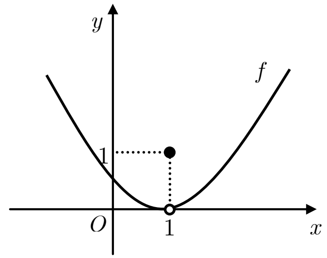


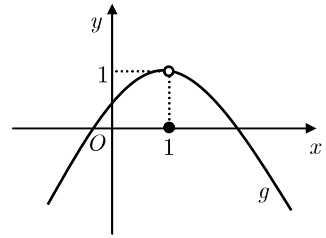
Sendo $a = \lim_{n \to +\infty} f(u_n)$ e $b = \lim_{n \to +\infty} f(v_n)$, qual é a proposição verdadeira?

(A) $a = 2 \wedge b = +\infty$ **(B)** $a = 2 \wedge b = -1$

(C) $a = 0 \wedge b = +\infty$ **(D)** $a = 0 \wedge b = -1$

5. Nas figuras a seguir estão representados os gráficos da funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$ e descontínuas no ponto de abcissa 1.





Quais são as funções contínuas em $\mathbb{R}$?

(A) $f + g$ e $f - g$ **(B)** $\frac{f}{g}$ e $f - g$

(C) $f + g$ e $f \times g$ **(D)** $\frac{f}{g}$ e $f \times g$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Uma caixa contém n bolas brancas e duas bolas pretas.

1.1. Nesta alínea, suponha que $n = 5$ e considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, três bolas da caixa.
Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas que existem no conjunto das bolas retiradas».
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

1.2. Sabe-se que, ao retirar **duas bolas** ao acaso da caixa, a probabilidade de elas serem ambas pretas é igual a $\frac{1}{120}$.
Ao retirar **apenas uma bola** ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser preta?

Sugestão: descubra primeiro o valor de n.

2. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_4\left(x^2+16\right) \geq 2 + \log_4\left(2x+1\right)$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

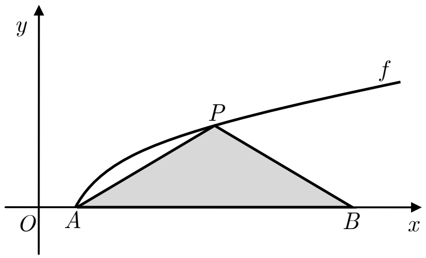
3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}-2} & \text{se } x > 3 \\ 16 & \text{se } x = 3 \\ e^{x-3}+15 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, mostre que a função h é contínua para $x = 3$.

4. No referencial o.n. xOy da figura estão representados:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_2 x$;
- um triângulo **isósceles** $[ABP]$ ($\overline{AP} = \overline{BP}$), em que:
  - A é um ponto do gráfico de f e pertence ao eixo das abcissas;
  - B é um ponto do eixo das abcissas;
  - P é um ponto do gráfico de f.



Considere que o P ponto se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f.

O ponto B acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{AP}$ permanece sempre igual a $\overline{BP}$.

Seja g a função, de domínio $]1,+\infty[$, que faz corresponder, à abcissa x do **ponto** $\boldsymbol{B}$, a **área** do triângulo $[ABP]$.

4.1. Mostre que, para cada $x \in]1,+\infty[$, se tem $g(x) = \dfrac{(x-1)\left[\log_2(x+1)-1\right]}{2}$.

4.2. Verifique que, se o ponto B estiver a 34 unidades de distância do ponto A, então a área do triângulo $[ABP]$ é igual a $34\log_2 6 - 17$ unidades de área.

4.3. O gráfico de f contém um único ponto que faz com que a área do triângulo $[ABP]$ seja igual a quatro unidades de área.

Traduza esta situação por meio de uma equação.

Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Indique a abcissa desse ponto com aproximação às centésimas.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Assinale o ponto em que se baseou para dar a sua resposta.

5. O *Bugatti Veyron* é o automóvel mais rápido do mundo (e também o mais caro).

Admita que, t segundos após o *Bugatti* começar um teste de velocidade, esta é dada, em quilómetros por hora, por

$$v(t) = 407\left(1 - e^{-0,11t}\right).$$

5.1. Determine a velocidade do *Bugatti Veyron* um minuto após o início do teste. Apresente o resultado em quilómetros por hora, arredondado às unidades.

5.2. **Sem usar a calculadora** (excepto para cálculos numéricos), calcule o tempo que o *Bugatti* demora a atingir os cem quilómetros por hora. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	1......30 1.1......15 1.2......15	2......20	3......20	4......48 4.1......16 4.2......16 4.3......16	5......32 5.1......14 5.2......18

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$\left(\rho \operatorname{cis} \theta\right)^n = \rho^n \operatorname{cis}\left(n\theta\right)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$