



Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2006/2007)

**3.º TESTE DE MATEMÁTICA A**

**12.º 5**

www.esaas.com

2.º Período

29/01/08

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Classificação:   ,

0 professor:

**Grupo I**

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Numa sala de Tempos Livres, existem alunos com idades entre os 15 e os 17 anos. Escolhe-se um aluno ao acaso. Sejam  $X$  e  $Y$  os acontecimentos:

$X$ : «o aluno escolhido tem 16 anos»;

$Y$ : «o aluno escolhido é rapaz».

Em cada uma das opções seguintes (A, B, C e D) estão representadas quatro tabelas relativas à distribuição dos alunos por idades e sexo.

Em qual das opções se tem  $P(\overline{X} | Y) = \frac{1}{3}$ ?

(A)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	1	5
Rapariga	2	5	7

(B)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	6	2
Rapariga	2	5	6

(C)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	6	1
Rapariga	3	5	7

(D)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	1	6
Rapariga	3	5	7

2. “Ao centro, havia uma pirâmide construída em degraus formados por grandes blocos.”

MUTAÇÃO POLAR, Clive Cussler

Considere, num referencial o.n., uma pirâmide rectangular cuja base é paralela ao plano  $xOy$  e em que apenas o vértice que não é da base pertence a um dos eixos coordenados, o eixo  $Oz$ .

Escolhendo, ao acaso, dois vértices dessa pirâmide, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta perpendicular ao eixo  $Oz$ ?

- (A)  $\frac{2}{5}$       (B)  $\frac{3}{5}$       (C)  $\frac{2}{7}$       (D)  $\frac{3}{7}$

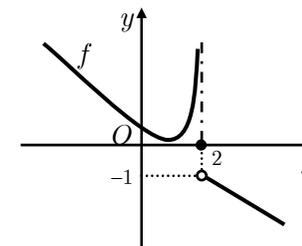
3. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos tais que  $a = b^3$ .

Qual é o valor de  $\log_b \left( \frac{\sqrt{b}}{a} \right)$ ?

- (A)  $-\frac{3}{2}$       (B)  $-\frac{5}{2}$       (C)  $-2$       (D)  $-1$

4. Na figura está a representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .  
Sabe-se que:

- A recta de equação  $x = 2$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ ;
- 2 é um zero de  $f$ ;
- Existe uma sucessão  $(u_n)$  tal que  $\lim f(u_n) = -1$ .



Qual das seguintes pode ser a expressão de  $(u_n)$ ?

- (A)  $\frac{2n-1}{n+1}$       (B)  $-\frac{1}{n}$       (C)  $\ln(n) - 1$       (D)  $2 + e^{-n}$

5. Uma vila foi elevada a cidade em 1990, altura em que havia 20000 habitantes. Devido a este facto, a população aumentou continuamente e, em 10 anos, ela aumentou para mais do dobro. No entanto, diversos estudos mostram que a população dessa cidade nunca ultrapassará os 80000 habitantes.

Seja  $n$  a função que dá o número de habitantes (em milhares) da cidade em questão  $t$  anos após 1990. Indique qual das seguintes expressões pode definir a função  $n$ .

(A)  $\frac{84}{1 + 3,2e^{-0,15t}}$     (B)  $\frac{80}{1 + 3e^{-0,1t}}$     (C)  $\frac{74}{1 + 2,2e^{-0,1t}}$     (D)  $\frac{70}{1 + 2,5e^{-0,15t}}$

6. De uma função  $h$ , sabe-se que:

- $h(x) = x^2 + bx + c$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$
- $h$  tem dois zeros, o 2 e o 3.

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{h(x)}$ ?

- (A) 1                      (B) -1                      (C) 2                      (D) 3

### Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Dez amigos, sete raparigas e três rapazes, vão tirar uma fotografia: cinco deles à frente e os outros cinco atrás.
- 1.1. De quantas maneiras podem estar os dez amigos na foto se na frente estiverem só raparigas?
- 1.2. Qual é a probabilidade de, na altura de tirarem a fotografia, os rapazes ficarem em três dos quatros extremos? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. “Passados minutos, o hidroavião sobrevoava a baía, erguendo-se num ângulo acentuado, para ultrapassar os picos escarpados das montanhas cinzentas que flanqueavam a enseada, apanhando depois a direcção norte, rumo ao desconhecido.”

MUTAÇÃO POLAR, Clive Cussler

Um hidroavião vai começar a descer em direcção ao mar. A partir desse momento, a sua altitude (em metros a partir do nível do mar), em função do tempo  $t$  em minutos, pode ser dada pela função definida por:

$$a(t) = \begin{cases} 10000 \times 2^{-0,2t} - 312,5 & \text{se } t \leq 25 \\ 0 & \text{se } t > 25 \end{cases}$$

Tal como é sugerido na expressão da função, o avião demora 25 minutos a tocar no mar.

Paralelamente, sabe-se que a velocidade desse hidroavião (em quilómetros por hora), no momento em que vai começar a descer para o mar e até parar, em função do tempo  $t$  em minutos, pode ser dada pela função definida por:

$$v(t) = \begin{cases} 800 \times 2^{-0,2t} + 210 & \text{se } t \leq 25 \\ 11985 - 470t & \text{se } t > 25 \end{cases}$$

- 2.1. Qual é, segundo este modelo, a velocidade do hidroavião no momento em que toca no mar?
- 2.2. Depois de aterrar, quanto tempo demorará o hidroavião a imobilizar-se?
- 2.3. **Sem usar a calculadora** (excepto para cálculos numéricos), determine a altitude do hidroavião no momento em que a sua velocidade é igual a 505 km/h. Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades. Se usar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.
3. Seja  $f$  a função, de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \ln x + 2$
- 3.1. Resolva as duas alíneas seguintes **sem recorrer à calculadora**.
- 3.1.1. Mostre que o gráfico de  $f$  intersecta a recta de equação  $y = 3$  num ponto e determine a abcissa desse ponto.

3.1.2. Considere agora a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+2x+1} & \text{se } x < -1 \\ f(x+1) & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Calcule, se existir,  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

3.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize, na janela  $[0, 7] \times [0, 5]$ , o gráfico da função  $f$ .

Reproduza, na sua folha de teste, um referencial o.n.  $xOy$  e o gráfico de  $f$ , visualizado na calculadora.

Assinale ainda os pontos  $A$  e  $B$  e as suas coordenadas sabendo que:

- $A$  é o ponto do gráfico de  $f$  de abcissa 1
- $B$  é o ponto do gráfico de  $f$  de ordenada 3,5

Determine o comprimento do segmento  $[AB]$ , apresentando o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere um polígono convexo com  $n$  lados,  $n \geq 3$ : o primeiro lado mede  $\log 2$ , o segundo lado mede  $\log 3$ , o terceiro  $\log 4$  e assim sucessivamente, isto é, o último lado mede  $\log(n+1)$ .  
Usando o método de **indução matemática**, mostre que o perímetro desse polígono é igual a  $\log[(n+1)!]$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
------------------------	--------------------------	---

Grupo II (146 pontos)	1. .... 27	2. .... 52	3. .... 50	4. .... 17
	1. 1. .... 11 1. 2. .... 16	2. 1. .... 16 2. 2. .... 16 2. 3. .... 20	3. 1. 1. .... 14 3. 1. 2. .... 18 3. 2. .... 18	