

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

2.º Período

09/02/11

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

 ,

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. “Não havia nenhum carro registado em nome dele e era pouco provável que ele tivesse alugado um carro e se arriscasse a deixar uma pista documentada.”

A RUA ONDE VIVEM, Mary Higgins Clark

Considere todas as matrículas de 6 dígitos que se podem formar com as 23 letras do alfabeto e os 10 algarismos.

Sejam os acontecimentos:

A: “A matrícula formada tem apenas dois algarismos”

B: “O primeiro dígito da matrícula é um algarismo”

Qual é o valor de $P(A | B)$?

- (A) $\frac{10 \times 23^4}{33^5}$ (B) $\frac{50 \times 23^4}{33^5}$ (C) $\frac{{}^{23}A_4 \times {}^{10}A_2}{{}^{33}A_6}$ (D) $\frac{{}^{23}A_4 \times 50}{{}^{33}A_6}$

2. Sejam A e B dois acontecimentos **independentes e equiprováveis** de um espaço de resultados Ω tais que $P(A) = 0,3$

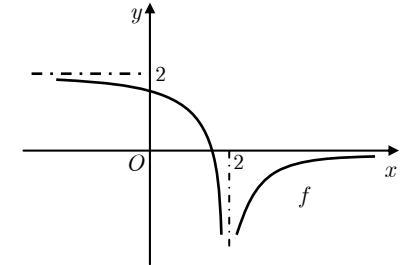
Qual é o valor de $P(\bar{A} \cup \bar{B})$?

- (A) 0,91 (B) 0,83 (C) 0,75 (D) 0,67

3. A função g está definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = 4^x + 8^x$
Qual das seguintes expressões pode também definir g ?

- (A) $2^{2x}(1 + 2^x)$ (B) $2^x(1 + 2^{2x})$ (C) $\sqrt{2} \times 2^{x+\frac{1}{2}}$ (D) $4^{x+\frac{1}{2}}$

4. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
Tal como a figura sugere, as rectas de equações $x = 2$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de f



Considere a sucessão definida por

$$u_n = -3 \cdot e^n \cdot n^{-15}$$

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$?

- (A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 2

5. Para um certo valor positivo de k , é **contínua** em \mathbb{R} a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \leq k \\ \log(x+2) & \text{se } x > k \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) $\sqrt{10} - 2$ (B) $\sqrt{10} - \sqrt{e}$ (C) $\sqrt{e} - 2$ (D) $-1,5$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Ao abrigo do programa *Erasmus*, dezenas de jovens de todo o mundo encontram-se a estudar na universidade de Valência (Espanha).



Admita que:

- num certo bairro residencial A moram 25 jovens, um quinto dos quais portugueses;
- num certo bairro residencial B moram 35 jovens, 40% dos quais portugueses.

- 1.1. Dois amigos do bairro A encontram-se na praça central de Valência. Qual é a probabilidade de um deles ser português? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

- 1.2. Considere o seguinte problema:

Dez amigos do **mesmo bairro** vão juntos para a universidade. Qual é a probabilidade de serem todos portugueses?

Uma resposta correcta para este problema é $\frac{{}^{14}C_{10}}{{}^{25}C_{10} + {}^{35}C_{10}}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

2. Considere a função h definida por $h(x) = \log_9(x - a)$, sendo a um número real.

Considere ainda que se têm os seguintes dados:

- b é um número real inferior a 15
- $h(b) = \log_3(a)$

Sem usar a calculadora, prove que 5 não pode ser o zero da função h

Sugestão: use o método de redução ao absurdo.

3. No início de 2000, o Hilário tinha 3 anos. A diferença entre a sua altura, em centímetros, e a do seu irmão mais novo, Elísio, pode ser dada, t anos após 2000, pela função definida por

$$A(t) = 60e^{-0,1386t}$$

Nos três itens seguintes, a calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

- 3.1. Quando tinha 10 anos, a altura do Hilário era igual a 140 centímetros.

Determine a altura do Elísio nesse ano.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

- 3.2. Usando processos exclusivamente analíticos, resolva o seguinte problema:

Quando é que a diferença de alturas do Hilário e do Elísio foi igual a 17 centímetros?

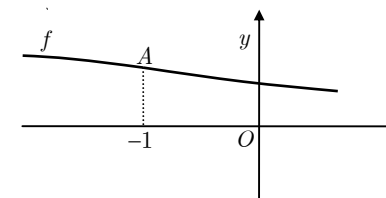
Apresente na sua resposta o ano e o mês que tal se verificou.

- 3.3. Determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

4. É dada a função de domínio \mathbb{R} definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-2x-3} & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = -1 \\ \frac{\ln(x+2)}{2x+2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Na figura está representada parte do gráfico da função f



Tal como a figura sugere, o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa -1

- 4.1. **Sem usar a calculadora**, mostre que, tal como a figura sugere, a função f é contínua no ponto A

4.2. Considere agora o segmento de recta $[PQ]$ sendo:

- P o ponto do gráfico de f do eixo Oy
- Q um ponto do gráfico de f de abcissa positiva e ordenada $0,2$

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o comprimento do segmento $[PQ]$ (arredondado às unidades).

Apresente na sua resposta:

- um referencial xOy e parte relevante do gráfico da função f
- o segmento $[PQ]$
- as coordenadas relevantes dos pontos, com duas casas decimais

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10		Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0	
Grupo II (150 pontos)	1.....40 1.1.....20 1.2.....20	2.....20	3.....50 3.1.....15 3.2.....20 3.3.....15	4.....40 4.1.....20 4.2.....20

Formulário

Probabilidades

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$